运筹学 ◁

马占新

The School of Economic & Management
Of Inner Mongolia University

内蒙古大学经济管理学院

内蒙古大学

管理运筹学

内蒙古大学经济管理学

马占新

2002. 12. 5

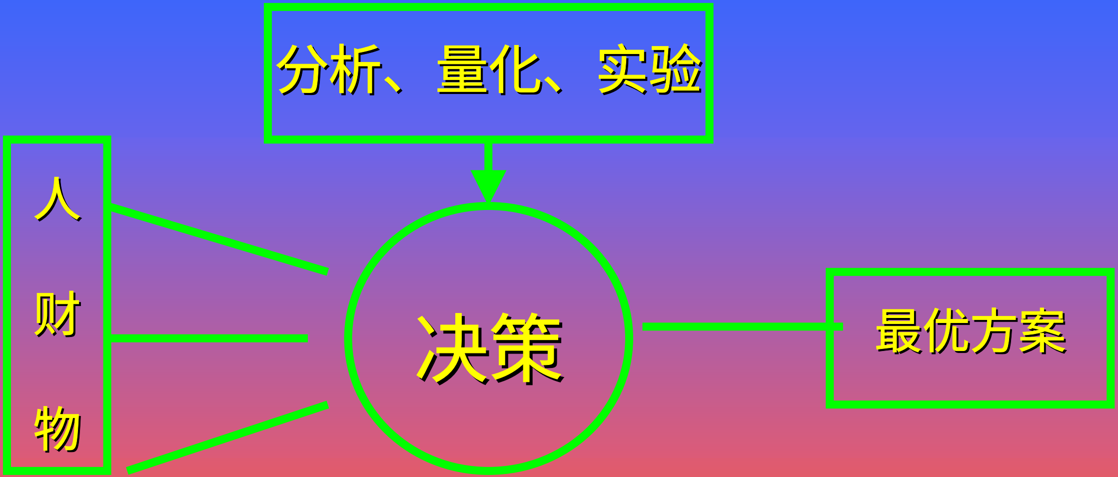
继续

目　录

第一章　　绪　论

- ▷ 运筹学定义
- ▷ 运筹学的发展
- ▷ 运筹学与定量分析方法
- ▷ 运筹学的的分支
- ▷ 运筹学在工商管理中的应用
- ▷ 学习运筹学应注意的问题

一 **运筹学的定义**：运筹学是一门应用科学，至今还没有统一的定义。我国出版的管理百科全书中的定义为：运筹学是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的量化方案，以实现最有定义的管理。当然运筹学也适合于其它领域。为区别起见，本书取名为管理运筹学。



分析、量化、实验

人

财

物

决策

最优方案

二 运筹学的发展

☆ 我国朴素的运筹学思想：齐王赛马、丁谓修皇宫等

☆ 作为新兴学科产生于二次世界大战初期：

A 解决战略战术问题： 合理运用雷达对付德国空袭、商队护航、躲避潜艇攻击损失减少了47%-29%）

B 二次世界大战后，转向民用

(1) 形成许多新分支。

(2) 计算机的发展推动了各分支的发展。

(3) 最早成立运筹学会的是英国（1948），然后是美国（1952），中国（1980），到1986已有38个国家或地区成立了运筹学组织。

(4) 运筹学与诺贝尔奖。

最早投入运筹学研究的诺贝尔奖获得者是美国物理学家勃拉凯特。1960年康托络维奇发表了《最佳资源利用的经济计算》获得了诺贝尔奖。从事金融数学、信息经济学方面研究的科学家也曾获此殊荣。

三　决策、定量分析方法与管理运筹学

☆ 决策是人们在政治、经济、技术和日常生活中普遍存在的一种选择方案的行为。

决策是管理中经常发生的一种活动。

☆ 决策的活动的过程和问题解决的过程

1　认清问题

2　找出可供选择的方案。

3　确定目标或评估方案的标准。

4　评估各个方案

5　执行此方案

6　进行后评估：问题是否得到完全解决。

决策1-5，决策是管理的中心。

其中　1-2是形成问题。

3-5是分析问题：可用定性和定量方法。

学习管理运筹学的思想和方法对提高决策者的决策水平具有极大的帮助。

四　运筹学的的分支

- 线性规划
- 整数规划
- 图与网络模型
- 存贮模型
- 排队论
- 对策论
- 排序与统筹方法
- 决策分析
- 动态规划
- 预测

五　运筹学在工商管理中的应用

- 生产计划：巴基斯坦一重型机械厂用线性规划安排生产，节省10%的费用。

- 库存管理
- 运输问题
- 人事管理
- 市场营销
- 财务和会计

另外，运筹学还成功运用于设备维修、更新和可靠性。项目选择与评价。工程优化设计。信息系统的设计与管理。以及城市紧急服务系统的设计与管理等。

中国从1957年开始把运筹学应用于交通运输、工业、农业等各行业。并取得了很大成绩：例如粮食调运的“图上作业法”、“中国邮路问题”等.

六 运筹学的使用情况

运筹学具有十分广泛的应用前景。

七 学习运筹学应注意的问题

克服片面陈旧的理解方式，紧跟时代步伐，学以致用、做到理论与实践的完美结合。

第二章 线性规划的图解法

线性规划是运筹学的一个重要分支，它是现代科学管理的重要手段之一。它的应用十分广泛。一些典型的线性规划在管理上的应用如下：

1．合理利用线材问题：现有一批长度一定的钢管，由于生产的需要，要求截出不同规 格的钢管若干。试问应如何下料，既满足了生产的需要，又使得使用的原材料钢管的数量最少。

2．配料问题：用若干种不同价格不同成分含量的原料，用不同的配比混合调配出一些不同价格不同规格的产品，在原料供应量的限制和保证产品成分的含量的前提下，如获取最大的利润。

3．投资问题：从不同的投资项目中选出一个投资方案，使得投资的回报为最大。

4．产品生产计划：合理充分地利用工厂里现有的人力、物力、财力，作出最优的产品生产计划，使得工厂获利最大。

5．劳动力安排：某单位由于工作需要，在不同时间段需要不同数量的劳动力，在每个劳动力工作日连续工作八小时的规则下，如何安排劳动力，才能用最少的劳动力来满足工作的需要。

6．运输问题：一个公司有若干个生产单位与销售单位，根据各生产单位的产量及销售单位的销量，如何制定调用方案，将产品运到各销售单位而总的运费最小。

以上这些问题，线性规划都能成功地加以解决。当然线性规划在管理上的应用远不止这些，但通过这些例子，我们可以看到线性规划问题的一些共同的特点：

1 求目标达到某些数量上的最大化或最小化。

2 所有线性规划问题都是在一定约束条件下来追求目标的。

第一节　问题的提出

例1 某公司在一周内只生产两种产品：产品A和产品B，产品A的利润为每千克50元，产品B的利润为每千克100元。产品A和产品B由两种原料混合生成的，

	产品A	产品B	资源约束
设备	1	1	300台时
原料1	2	1	400千克
原料2	0	1	250千克

问如何生产各种产品利用最大？

解： 设x_1— 代表生产产品A的数量

x_2— 代表生产产品B的数量

由于A的利润为每千克50元，B的利润为每千克100元，则利润函数为：

利润=50× x_1 +100× x_2 （元）

因为能使用的原料是有限的，因此生产过程中使用的设备台时数不能超过300，

$$x_1 + x_2 \leq 300\text{（台时数限制）}$$

同样地我们可以得出：

$$2x_1 + x_2 \leq 400\text{（原料1的供应约束）}$$

$$x_2 \leq 250\text{（原料2的供应约束）}$$

除了上述约束外，显然还应该有$x_1 \geq 0$， $x_2 \geq 0$，因为产品A和产品B的产量是不能取负值的。

本问题的数学模型为：

$$\begin{cases} \max z = 50x_1 + 100x_2 & \text{———— 目标函数} \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \leq 300 & \\ 2x_1 + x_2 \leq 400 & \text{———— 约束条件} \\ x_2 \leq 250 & \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

- 由于上述数学模型的目标函数为变量的线性函数，约束条件也为变量的线性等式或不等式，故此模型称之为**线性规划**。
- 如果目标函数是变量的非线性函数，或约束条件中含有变量非线性的等式或不等式的数学模型则称之为**非线性规划**。
- 把所有满足约束条件的解称为**可行解**。把使目标函数（利润）达到最大的可行解，称为**最优解**。

建模过程：

1 什么条件下，追求什么目标。

2 定义变量，决策变量组（x_1， x_2， … ， x_n）表示了一个方案。

3 用线性函数写出追求的目标。

4 用决策变量的等式或不等式表示约束条件。

线性规划问题的一般形式：

目标函数：

满足约束条件（Subject To）：

$$\left\{\begin{array}{l} \max(\min)\quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ \\ \text{s.t.}\quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq (=, \geq)\ b_1 \\ \qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq (=, \geq)\ b_2 \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq (=, \geq)\ b_m \\ \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right.$$

第二节 线性规划问题的图解法

缺点：只适用于两个变量的线性规划问题。

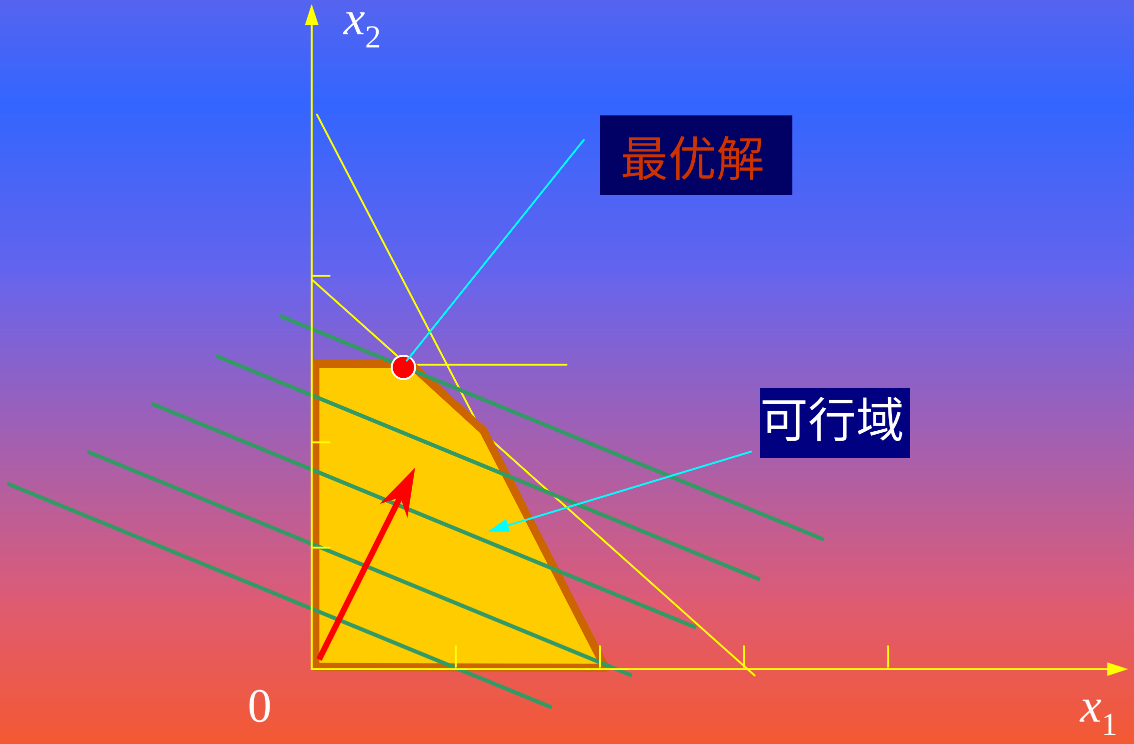
优点：图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。

求解方法：

例1　对以下线性规划问题求解：

$$\left\{\begin{array}{ll} \max z = 50x_1 + 100x_2 & \text{———— 目标函数} \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \le 300 & \\ 2x_1 + x_2 \le 400 & \text{———— 约束条件} \\ x_2 \le 250 & \\ x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 & \end{array}\right.$$

在以x_1， x_2为坐标轴的直角坐标系里，图上任意一点的坐标就代表了决策变量的一组值，也就代表了一个具体的决策方案。约束条件的集合可表示为：



图中的阴影区称为可行域，即在区域的所有点都满足本问题的约束条件，在有些问题中可能没有可行域，也就自然没有最优解。

2．等值线与最优值

从可行域的所有解中如何找到目标函数的最大值呢？

我们来看目标函数： $z = 50x_1 + 100x_2$

如果令 $z = 10000$，则有： $z = 50x_1 + 100x_2 = 10000$

很明显在这条线上所有的点都能产生10000元的利润，称这条线为目标函数的一条**等值线**。

当利润增加时，目标等值线只是向上（或向右）平行移动。现在我们就明白了如何去寻找最优解，我们向上（或向右）移动目标函数线，直到移动到与可行域相切的时候，就得到最优解。

即最优解是 $x_1 + x_2 = 300$与 $x_2 = 250$的交点是：$x_1 = 50$， $x_2 = 250$。$z = 27500$

即生产产品A和B分别为50和250千克时利润最大，这时利润为27500元

最优生产方案下资源消耗情况：

台时数 ： $x_1 + x_2 = 300$

原料1 ： $2x_1 + x_2 = 350 < 400$

原料2 ： $x_2 = 250$

在上式中原料1还有剩余，在小于等于不等式中这个剩余的资源或能力称为**松弛量，**代表它的变量称为**松弛变量，**记为s_i，$i = 1$，2，3。

显然，加入s_i后，原线性规划为：

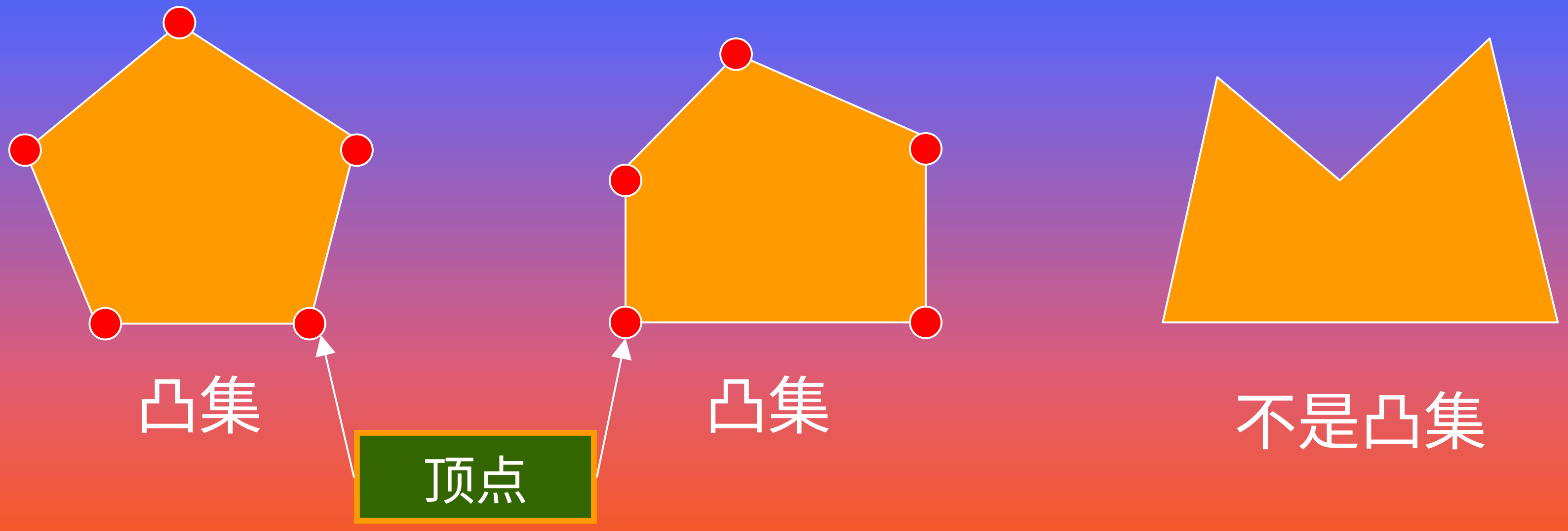
$$\begin{cases} \max z = 50\, x_1 + 100\, x_2 \quad \underline{\qquad\qquad} \text{目标函数} \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + s_1 = 300 \\ 2\, x_1 + x_2 + s_2 = 400 \\ x_2 + s_3 = 250 \\ x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{cases}$$

1 通过这种办法可以把所有的约束条件都变成等式。

2 若$b_j < 0$, 则两边乘以 -1。

象这样所有的约束条件都变成等式，把b_j变成非负的过程，称为线性规划的**标准化**。

线性规划的可行域是凸集，线性规划的最优解在极点上，有限个约束条件，顶点也是有限的。



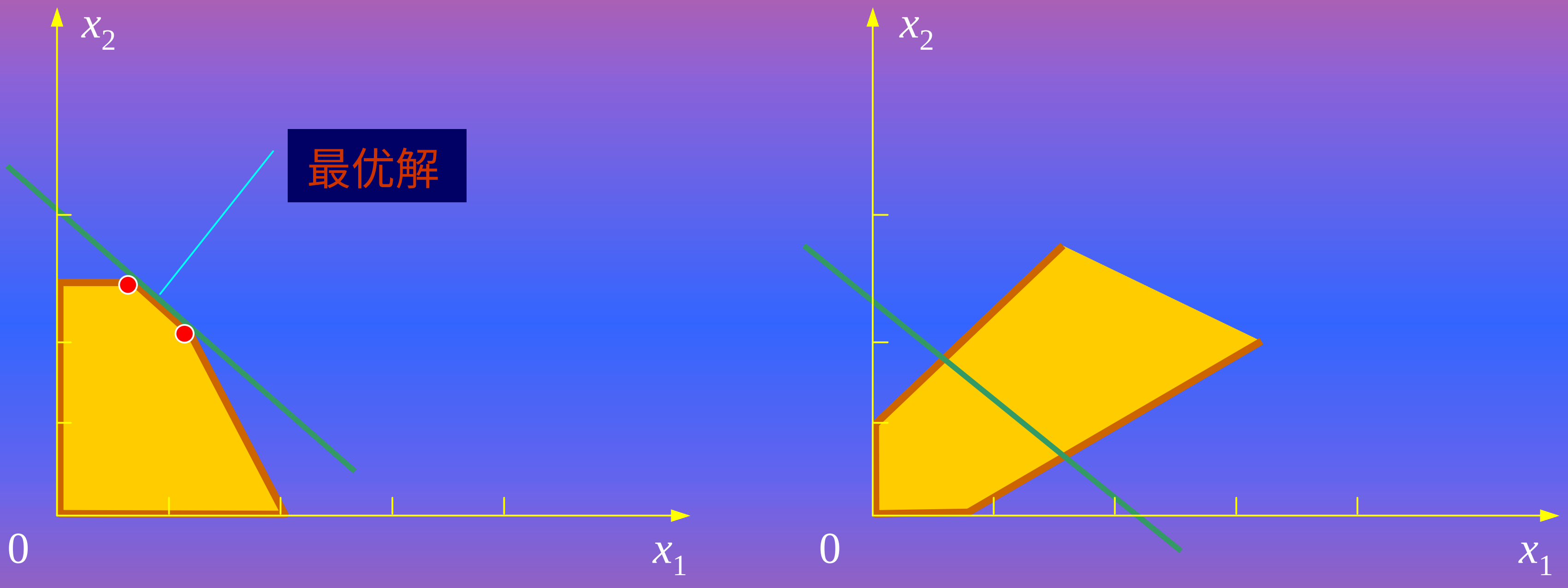
从例1可见：

1 若线性规划有最优解，则一定在可行域的某个顶点上达到。

2 线性规划存在有无穷多解的情况

3 线性规划存在无界解的情况

4 线性规划存在无可行解的情况



例如大连理工大学应用中的例子。

例2	原料A	原料B	原料A和B的要求
至少需要	125吨		350
加工时间	2小时/吨	1小时/吨	共600小时
单价	2万元/吨	3万元/吨	

问如何购买，成本最低？

解：设x_1— 代表购买A的数量

x_2— 代表购买B的数量

成本函数为：$2x_1 + 3x_2$ （元）

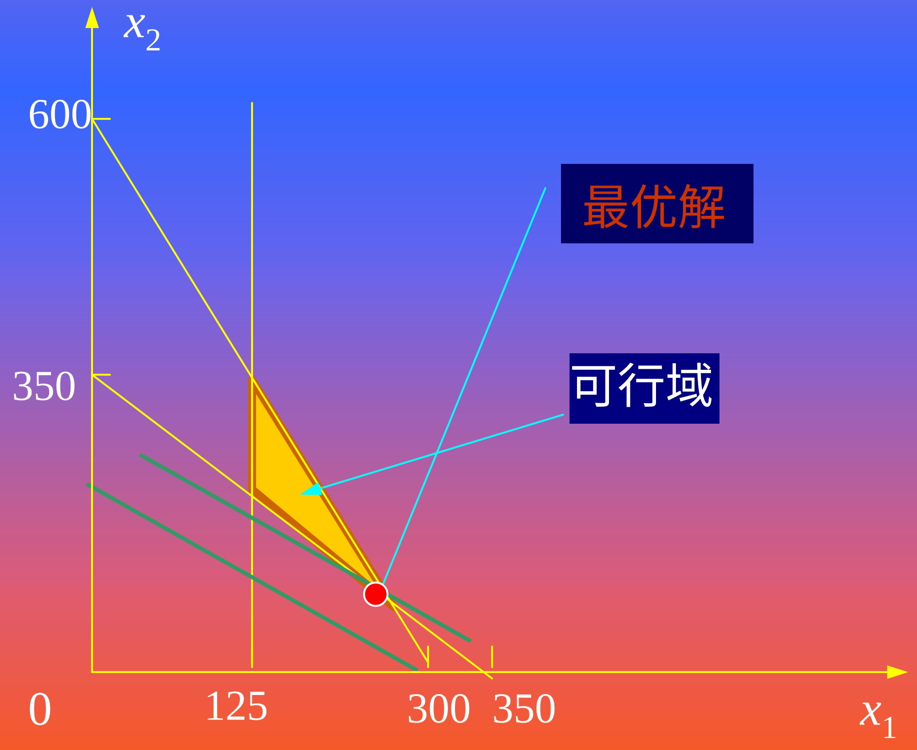
$x_1 + x_2 \geq 350$（原料A和B的限制）

$x_1 \geq 125$（原料A的限制）

$2x_1 + x_2 \leq 600$（工时的约束）

本问题的数学模型为：

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 \geq 350 \\ x_1 \geq 125 \\ 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



即最优解是 $x_1 + x_2 = 350$ 和 $2x_1 + x_2 = 600$ 的交点是：$x_1 = 250$， $x_2 = 100$。
即购买A原料250吨、B原料100吨时，成本最小，这时成本为800万元

在约束条件中，原料A购进了250吨，比最低要求125吨多了 125吨，在大于等于不等式中这个超过量称为**剩余量，**若用一个变量表示这个剩余量，则称这个变量为**剩余变量。**

加入剩余变量后，上述问题可以变为以下形式：

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 - s_1 = 350 \\ \qquad x_1 - s_2 = 125 \\ \qquad 2x_1 + x_2 + s_3 = 600 \\ x_1, \; x_2, \; \mathbf{s_1}, \; \mathbf{s_2}, \; \mathbf{s_3} \geq 0 \end{cases}$$

第3节 图解法的灵敏度分析

线性规划问题的一般形式：

目标函数：

满足约束条件

（Subject To）：

$$\left\{\begin{array}{l} \max(\min)\ \ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ \dots\ + c_n x_n \\ \\ \text{s.t.}\quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ \dots\ + a_{1n} x_n \leq (=, \geq)\ b_1 \\ \qquad\quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ \dots\ + a_{2n} x_n \leq (=, \geq)\ b_2 \\ \qquad\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\quad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ \dots\ + a_{mn} x_n \leq (=, \geq)\ b_m \\ \qquad\quad x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \geq 0 \end{array}\right.$$

（1） 如何将一般形式化为标准形式

（2） 研究线性规划的一些系数、、变化时，对最优解产生什么影响，称之为**灵敏度分析**。

（3）**灵敏度分析是非常重要**的，首先因为、这些系数都是估计值和预测值，不一定非常精确，再则即使这些系数在某一时刻是精确值，它们也随着市场条件的变化而变化，不会一成不变的。例如，原材料的价格、商品的售价、加工能力、劳动力的价格等等的变化都会影响这些系数的变化，有了灵敏度分析就不必为了应付这些变化而不停地建立新的模型和求解新的最优解，也不会由于系数的估计和预测的精确性而对所求得的最优解存有不必要的怀疑。

3．1　目标函数中的系数c_i的灵敏度分析

（1）最优解总是在可行域的某个顶点处达到，目标函数的斜率就决定了最优解在可行域的哪个顶点达到。

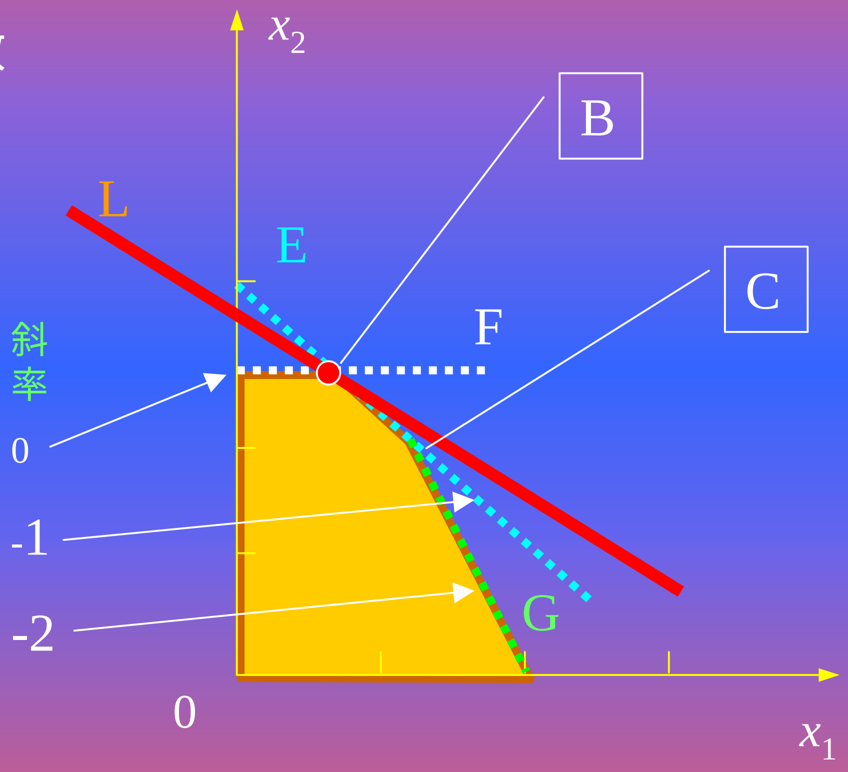
（2）斜率是由目标函数中的系数c_i决定的。

L：$z = 50x_1 + 100x_2$ ________目标函数

E：$x_1 + x_2 = 300$

G：$2x_1 + x_2 = 400$

F：$x_2 = 250$



（1）当目标函数$z = c_1x_1 + c_2x_2$的斜率$-c_1/c_2$在直线E 、 F之间时，B为最优解点。

（2）当目标函数$z = c_1x_1 + c_2x_2$的斜率$-c_1/c_2$在直线E 、 G之间时，C为最优解点。

即：$-1 \leq -c_1/c_2 \leq 0$时， B为最优解

情况1： 产品B的利润为100元不变，则产品A的利润如何变化，最优解不变？

解：　$-1 \le -c_1/c_2 \le 0$时，B为最优解。

当 产品B的利润为100元不变时，$c_2=100$。知 $-1 \le -c_1/100 \le 0$时，B为最优解。

则产品A的利润在0和100之间时，最优解不变。

情况2：产品A的利润为50元不变，则产品B的利润如何变化，最优解不变？

对c_2类似可得：产品B的利润只要大于或等于50，最优解不变。

情况3：产品A的利润为60元，产品B的利润为55元，最优解变否？

因为 $-60/55 \le -1$，B不是最优解。

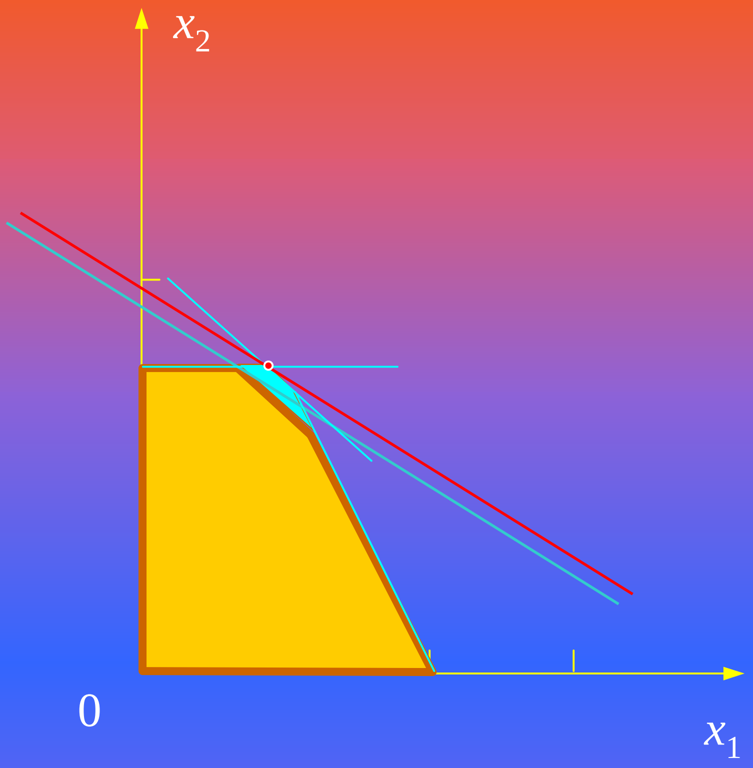
练习：探讨其他顶点的情况。

3.2　约束条件中右边系数的灵敏度分析

当约束条件右边系数变化时，其线性规划的可行域也将变化，这样就可能引起最优解的变化。

为了说明这方面的灵敏度分析，不妨设例1中的台时数增加了10台时，则共有台时数310个，这样台时数的约束条件就变成为：

$$x_1 + x_2 \le 310$$



它的可行域，如下图所示。

黄色区域为台时数增加前的区域,

台时数增加后的区域为黄色和绿色区域的和，最优解为即最优解是

$x_1 + x_2$ =300与 x_2 =250的交点，

解得：x_1 =60， x_2 =250。z =28000，比原来27500增加了500元，故增加1可多获利50元。

像这样在约束条件右边常量增加一个单位而使最优目标函数值得到改进的数量称之为这个约束条件的**对偶价格**。对偶价格仅仅在某一范围内有效，对偶价格的有效范围确定，将在后面介绍。因此，当约束条件右边常数增加一个单位时：

1）如果对偶价格大于零，则其最优目标函数值得到改进，即求最大值时，变得更大；求最小值时，变得更小。

2）如果对偶价格小于零，则其最优目标函数值变坏，即求最大值时，变得小了；求最小值时变得大了。

3）如果对偶价格等于零，则其最优目标函数值不变。

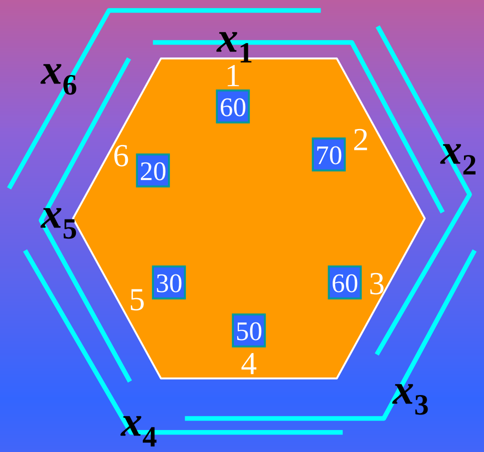
练习：例1中原料A的数量增加了10千克，则最优值和最优解会有什么变化?

第三章 线性规划在工商管理中的应用 ◁

- ▷ 人力资源的分配问题
- ▷ 生产计划问题
- ▷ 套裁下料问题
- ▷ 配料问题
- ▷ 投资问题

一 人力资源的分配问题

例 1 有关情况如图所示，问如何安排人员，即能满足需要，又能使需要的人最少？



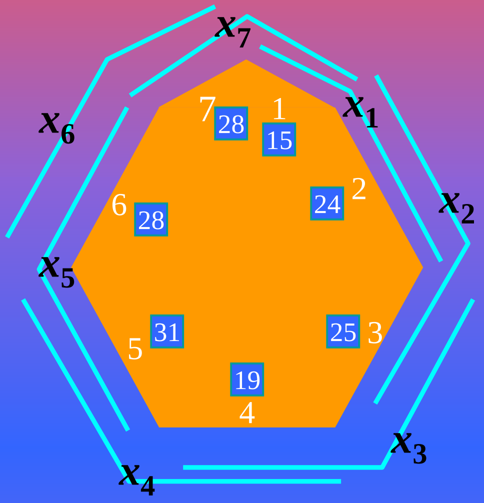
解： x_i 表示第I班开始上班的人数。

则数学模型为：

$$
\begin{cases}
\min \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
\text{s.t.} \quad x_1 + x_6 \geq 60 \\
\qquad x_1 + x_2 \geq 70 \\
\qquad x_2 + x_3 \geq 60 \\
\qquad x_3 + x_4 \geq 50 \\
\qquad x_4 + x_5 \geq 20 \\
\qquad x_5 + x_6 \geq 30 \\
\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

用运筹学软件可算得结果是: x_1 =50, x_2 =20 , x_3 =50 , x_4 =0 , x_5 =20, x_6 = 10 ,总人数为150人

例 2　有关情况如图所示，问如何安排人员，即能满足需要，又能使需要的人最少？



解：x_i 表示星期i开始休息的人数。

则数学模型为：

$$
\begin{cases}
\min \ (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) \\
\text{s.t.} \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 28 \\
\qquad x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geq 15 \\
\qquad x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 24 \\
\qquad x_1+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 25 \\
\qquad x_1+x_2+x_5+x_6+x_7 \geq 19 \\
\qquad x_1+x_2+x_3+x_6+x_7 \geq 31 \\
\qquad x_1+x_2+x_3+x_4+x_7 \geq 28 \\
\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

用运筹学软件可算得结果是: x_1 =12, x_2 =0，x_3 =11，x_4 =5，x_5 = 0, x_6 = 8，x_7 = 0, 总人数为36人

二　生产计划问题

例 3 明星公司生产甲、乙、丙三种产品，甲和乙二种产品可以外包协作，亦可自行生产，但丙产品必须本厂生产，有关情况见下表，问如何安排生产，利润最大？

工时与成本	甲	乙	丙	约束条件
每件铸造工时（小时）	5	10	7	8000
每件机加工工时（小时）	6	4	8	12000
每件装配的工时（小时）	3	2	2	10000
自产铸件每件成本（元）	3	5	4	
外协铸件每件成本（元）	5	6	----	
机加工每件成本（元）	2	1	3	
装配每件成本（元）	3	2	2	
每件产品售价（元）	23	18	16	

解：设 x_1，x_2，x_3表示三道工序都由本公司加工的甲、乙、丙三种产品的数量，x_4，x_5表示先由外厂铸造再由本厂加工的甲、乙产品的数量。

工时与成本	甲	乙	丙	约束条件
每件铸造工时（小时）	5	10	7	8000
每件机加工工时（小时）	6	4	8	12000
每件装配的工时（小时）	3	2	2	10000
自产铸件每件成本（元）	3	5	4	
外协铸件每件成本（元）	5	6	----	
机加工每件成本（元）	2	1	3	
装配每件成本（元）	3	2	2	
每件产品售价（元）	23	18	16	

产品甲的自制利润为：23-(3+2+3)=15

产品乙的自制利润为：18-(5+1+2)=10

产品丙的利润为：16-(4+3+2)=7

产品甲的自制利润为：23-(5+2+3)=13

产品乙的自制利润为：18-(6+1+2)=9

则数学模型为：

$$
\begin{cases}
\min(15x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 13x_4 + 9x_5) \\
\text{s.t.} \quad 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 \leq 8000 \quad \text{(铸造)} \\
6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leq 12000 \quad \text{(机加工)} \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 10000 \quad \text{(装配)} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{cases}
$$

输出结果

```
目标函数值为：29400
变量        最优解          相差值
x1          1600             0
x2            0             2
x3            0             13.1
x4            0             0.5
x5            600              0
约束          松弛/剩余            对偶价格
1                0                 0.3
2                0                 2.25
3                400               0



目标函数系数范围
变量          下限          当前值          上限
x1            14               15              无
x2             无             10               12
x3             无              7             20.1
x4             无             13              13.5
x5            8.667            9               10

常数项范围
约束          下限          当前值          上限
1               0           8000           10000
2               9600        12000          20000
3               6000        10000          无
```

结果含义

X_2相差值=2：

表示全部自己生产的乙产品的利润再增加2时，才可以自己生产产品乙,否则利润不能最大

对偶价格：

表示增加一个铸造工时时，可使利润增加0.3元。

购进:若购入价为0.2，则利润 R = 0.3 - 0.2

故以低于铸造的对偶价格购入工时.

出售: 出售价> 成本+对偶价格

利润= 出售价 - 成本>对偶价格

目标函数系数范围

当 $14 \leq C_1$ 时，最优解不变。

注意：最优值变了。

常数项范围

表示：(1)当 $0 \leq b_1 \leq 10000$时，约束条件1的对偶价格不变。

例 4 永久机械厂生产甲、乙、丙三种产品,每种产品分别需要两道工序和B, 问如何安排生产，利润最大？

工序	设备	产品单件工时			设备有效台时数	满负荷时的设备费用
		甲	乙	丙		
A	1	5	10		6000	300
	2	7	9	12	10000	321
B	1	6	8		4000	250
	2	4		11	7000	783
	3	7			4000	200
原料单价(元/件)		0.25	0.35	0.5		
产品售价(元/件)		0.25	2	2.8	16	

解：设 x_{ijk}表示第i种产品在第j道工序上的第k种设备上的加工数量。

利润=∑ [(销售价-原料单价) ×件数] - ∑(台时价单×台时数]，这样有以下模型：

$$\max[(1.25-0.25)(x_{111}+x_{112})+(2-0.35)x_{221}+(2.8-0.5)x_{312}$$

$$-\frac{300}{6000}\times(5x_{111}+10x_{211})-\frac{321}{10000}\times(7x_{112}+9x_{212}+12x_{312})$$

$$-\frac{250}{4000}\times(6x_{121}+8x_{221})-\frac{783}{7000}\times(4x_{122}+11x_{322})-\frac{200}{4000}7x_{123}$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}5x_{111}+10x_{211} \leq 6000 & (\text{设备A1})\\ 7x_{112}+9x_{212}+12x_{312} \leq 10000 & (\text{设备A2})\\ 6x_{121}+8x_{221} \leq 4000 & (\text{设备B1})\\ 4x_{122}+11x_{322} \leq 7000 & (\text{设备B2})\\ 7x_{123} \leq 4000 & (\text{设备B3})\\ x_{111}+x_{112}-x_{121}-x_{122}-x_{123} = 0 & \\ x_{211}+x_{212}-x_{221} = 0 & \\ x_{321}-x_{322} = 0 & \\ x_{ijk}\geq 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,\ k=1,2,3: & \end{cases}$$

解得: $x_{111}=1200$, $x_{112}=230.0492$, $x_{212}=500$, $x_{312}=324.138$, $x_{221}=500$, $x_{122}=858.6206$, $x_{322}=324.138$, $x_{123}=571.4286$, $Z=1146.6005$, 本题决策变量为整数,四舍五入得

三 套裁下料问题

例 5 某厂生产100套钢架，每套用长为2.9米, 2.1米和1.5米的圆钢各一根，已知原料每根长7.4米, 问如何生产最省？

方案	1	2	3	4	5
2.9 米	1	2	0	1	0
2.1 米	0	0	2	2	1
1.5 米	3	1	2	0	3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

解: 设按方案1、2、3、4、5下料的圆钢分别为x_1，x_2, x_3，x_4，x_5根．则有：

$$\begin{cases} \min & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \\ \text{s.t.} & x_1+2x_2+x_4 \geq 100 \\ & 2x_3+2x_4+x_5 \geq 100 \\ & 3x_1+x_2+2x_3+3x_5 \geq 100 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

解得: $x_1=30$, $x_2=10$, $x_3=0$, $x_4=50$, $x_5=0$, 共用90根.

最简单的方案是: 每根原料做一个架．料头为0.9米.做100套,需要100根.

(1) 约束条件取等号可能导致无可行解.

(2) 求原料根数最少和料头最小是一样的,但由于第一个方案中料头为0, 可能导致无穷多最优解, 因此, 用根数最少为目标.

比如: 用料头最小为目标$x_1=100$, $x_2=10$, $x_3=0$, $x_4=50$, $x_5=0$也是最优解.

四 配料问题

例6 某公司用1、2、3三种原料混合成甲、乙、丙三种产品，有关数据如表所示，问如何生产，利润最大？

产品名称	规格	单价（元/千克）		原料名	每天最多供应量	单价（元/千克）
甲	原料 1 不少于 50% 原料 2 不超过 25%	50		1	100	65
乙	原料 1 不少于 25% 原料 2 不超过 50%	35		2	100	25
丙	不限	25		3	60	35

解: 设 x_{ij}表示第i种产品中原料j 的含量。目标函数为 = 3种产品的销售收入– 三种原料的成本

$$\left\{\begin{array}{lll}
\max & \multicolumn{2}{l}{50(x_{11}+x_{12}+x_{13})+35(x_{21}+x_{22}+x_{23})+50(x_{31}+x_{32}+x_{33})-65(x_{11}+x_{21}+x_{31})-25(x_{12}+x_{22}+x_{32})} \\
 & \multicolumn{2}{l}{-35(x_{13}+x_{23}+x_{33})} \\
\text{s.t.} & x_{11} \geq 0.5\,(x_{11}+x_{12}+x_{13}) & x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 100 \\
 & x_{12} \leq 0.25\,(x_{11}+x_{12}+x_{13}) & x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 100 \\
 & x_{21} \geq 0.25\,(x_{21}+x_{22}+x_{23}) & x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 60 \\
 & x_{22} \leq 0.5\,(x_{21}+x_{22}+x_{23}) & \\
 & x_{ij} \geq 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3 &
\end{array}\right.$$

	1	2	3
甲	11	12	13
乙	21	22	23
丙	31	32	33

解得: $x_{11}=100$, $x_{12}=50$, $x_{13}=50$, 其余变量均为0.

练习:例题7

五　投资问题

例 8　某部门现有资金200万元, 问如 (1) 何投资第五年末拥有本利金额最大？

(2) 何投资能使第五年末拥有本利金额在330万元的基础上,投资风险最小？

解: 设x_{ij}为第i年初投于j项目的 金额.

max　$1.1 x_{5A} + 1.25x_{4B} + 1.4x_{3C} + 1.55x_{2D}$

s.t.　$x_{1A} + x_{1B} = 200$

$x_{2A} + x_{2B} + x_{2D} = 1.1 x_{1A}$

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 1.1 x_{2A} + 1.25 x_{1B}$

$x_{4A} + x_{4B} = 1.1 x_{3A} + 1.25 x_{2B}$

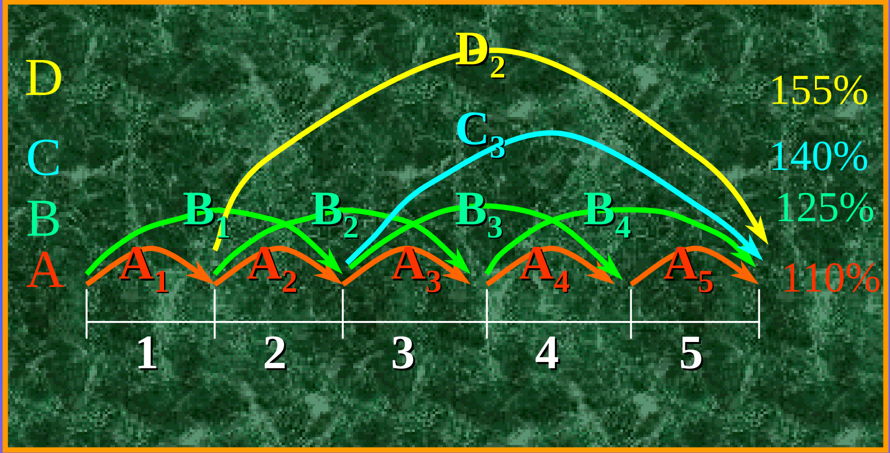
$x_{5A} = 1.1 x_{4A} + 1.25 x_{3B}$

$x_{iB} \leq 30$

$x_{3C} \leq 80$

$x_{2D} \leq 100$

$x_{ij} \geq 0$, i = 1,2,3, 4,5　j =A, B,C, D



解得: $x_{1A} = 170$, $x_{2A} = 57$, $x_{3A} = 0$, $x_{4A} = 7.5$,
$x_{5A} = 33.5$, $x_{1B} =30$, $x_{2B} =30$, $x_{3B} =20.2$,
$x_{4B} = 30$, $x_{2D} =100$, $x_{3C} =80$, z=341.35万元

问题(2): 目标函数:$\sum x_{iA} + 3\sum x_{iB} +4 x_{3C} +5.5 x_{2D}$
约束条件在原有基础上增加:
$1.1 x_{5A} + 1.25x_{4B} + 1.4x_{3C} + 1.55x_{2D} \geq 330$

六　案例分析

在65页中选择若干案例进行分析和讨论.

第四章　单纯形法

◁

- ▷ 单纯形法的思路和原理
- ▷ 单纯形法的表格形式
- ▷ 求目标函数最小的线性规划问题
- ▷ 几种特殊情况

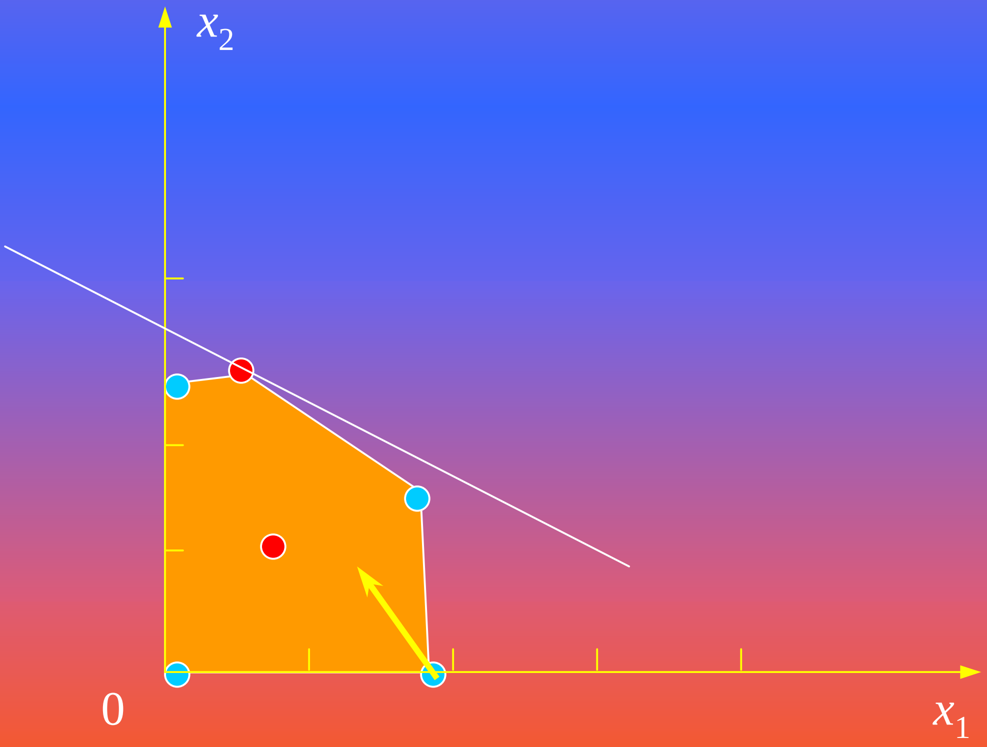
一 单纯形法的思路和原理

线性规划模型的结构
目标函数 ： $\max(\min)\ Z = C^TX$
约束条件： s.t. $AX \geq (=,\leq)\ b$
变量符号： $X \geq (\leq)\ 0$

线性规划的标准形式
目标函数 ： $\max\ Z = C^TX$
约束条件： s.t. $AX = b$
变量符号： $X \geq 0$

- 线性规划的可行域是凸集
- 线性规划的最优解在极点上

在线性规划的模型中：
（1）如何找到可行域的第一个顶点
（2）如何实现由一个顶点到另一个顶点的变换。
（3）如何保证变换的方向是增大的。
（4）如何判断是否达到最优。

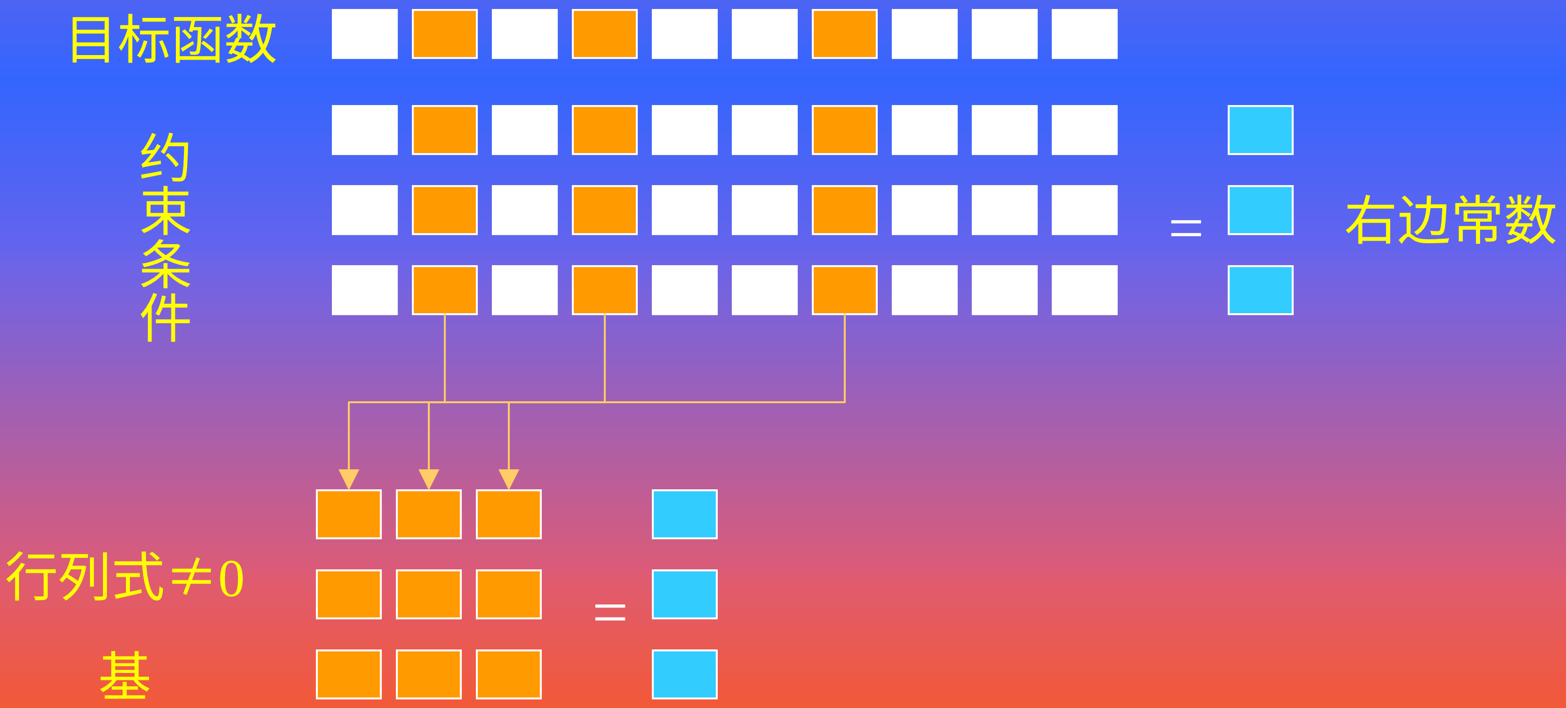


一 如何寻找初始基本可行解

在单纯形法中可行域的顶点就叫做基本可行解。 第一个找到的可行域的顶点就叫做初始基本可行解。

线性规划的基本概念

先来看一些基本概念：基、基向量、非基向量、基变量、非基变量



例如：要寻找以下线性规划问题的基本可行解，要首先化成标准型：

$$\begin{aligned} \max \quad z= & 50x_1 + 100x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 300 \\ & 2x_1 + x_2 \le 400 \\ & x_2 \le 250 \\ & x_1, \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

标准型为：

$$\begin{aligned} \max \quad z= & 50x_1 + 100x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 300 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 400 \\ & x_2 + x_5 = 250 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

令：$(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（1） 选：（P_3，P_4，P_5）为一组基。

（2） 选：（P_2，P_3，P_5）为一组基。

（1） 选：（P_3，P_4，P_5）为一组基。 （2） 选：（P_2，P_3，P_5）为一组基。

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 50x_1 & +100x_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & +x_2 & \boxed{+x_3} & & & =300 \\
 & 2x_1 & +x_2 & & \boxed{+x_4} & & =400 \\
 & & x_2 & & & \boxed{+x_5} & =250 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & , x_4, & x_5, & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllllll}
\max & 50x_1 & +100x_2 & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \boxed{+x_2} & \boxed{+x_3} & & & =300 \\
 & 2x_1 & \boxed{+x_2} & & +x_4 & & =400 \\
 & & \boxed{x_2} & & & \boxed{+x_5} & =250 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & , x_4, & x_5, & \geq 0
\end{array}
$$

基本解：在约束方程系数阵中找到一个基，令非基变量为0，求得的解，叫做线性规划问题的一个基本解。

基本可行解：如果基本解满足非负条件，则称为基本可行解。对应的基叫**可行基**.

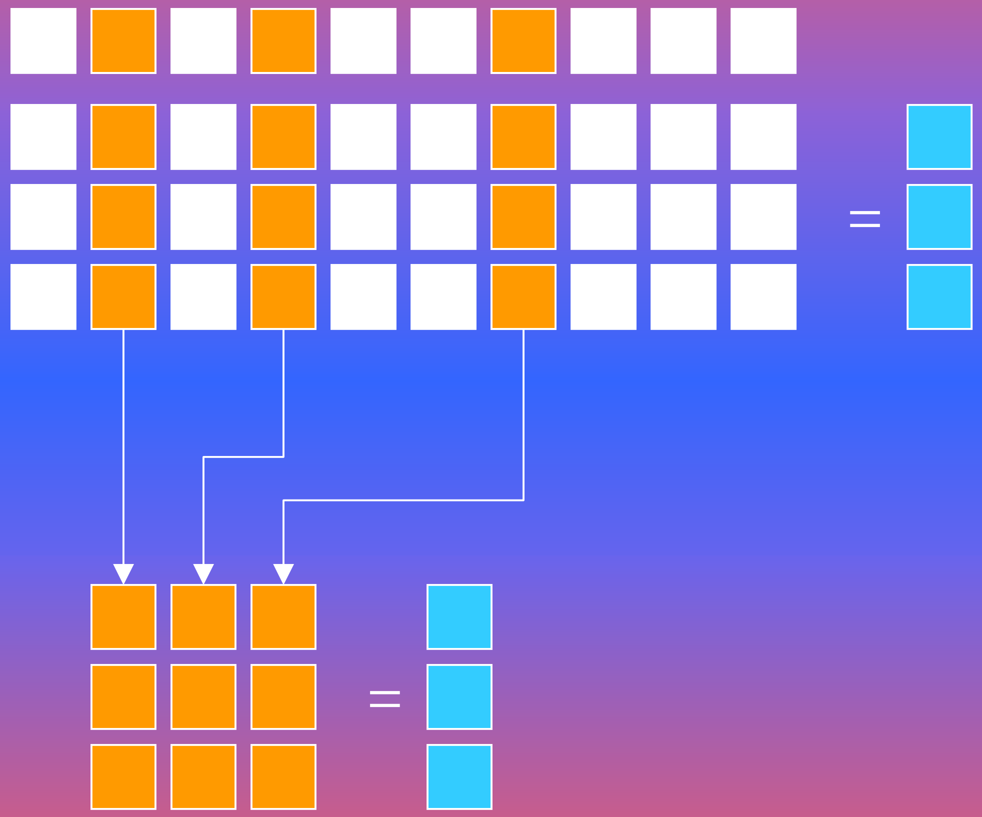
例如：基（1）的基本解为(x_1，x_2，x_3，x_4，x_5)= (0，0，300，400，250)，可行

基（2）的基本解为(x_1，x_2，x_3，x_4，x_5)= (0，400，-100，0，-150)，不可行

注意：一般只有求出基本解后, 才知道这个解是否可行。对应的基是否为可行基, 即基本解是否对应可行域的顶点.

那么, 是否在求解之前找到一个可行基呢? 对于线性规划问题如果能够找到一个基是单位阵的各列向量构成的, 就可以得到可行基.(详见基(1))

二　如何实现顶点间的变换



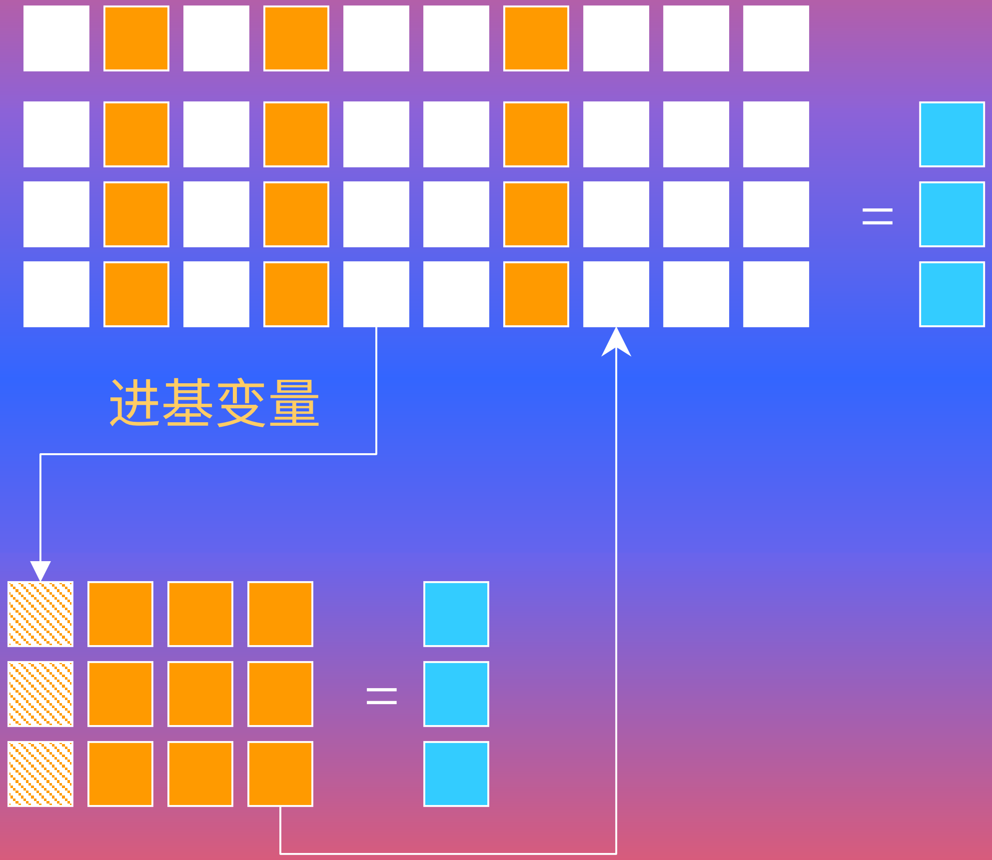
目标函数

约束条件

右边常数

基变量

基矩阵



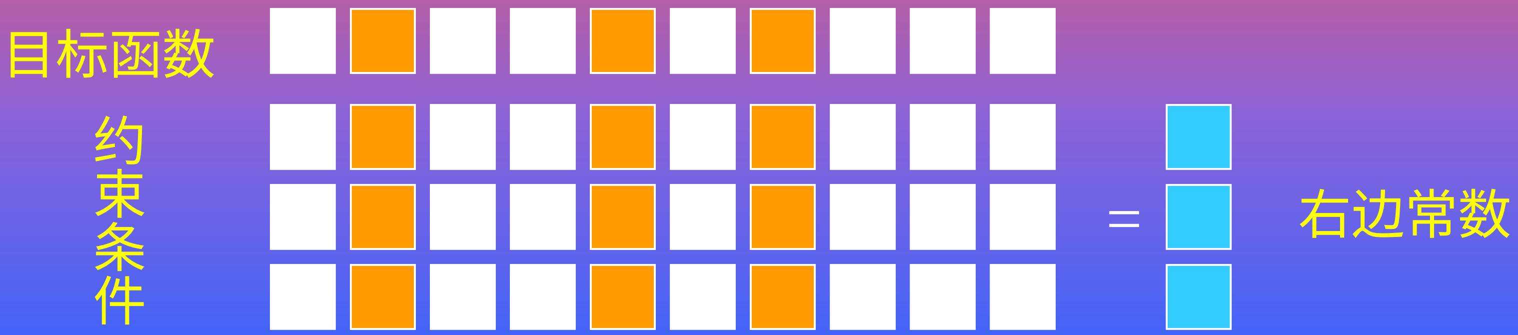
目标函数

约束条件

右边常数

进基变量

离基变量

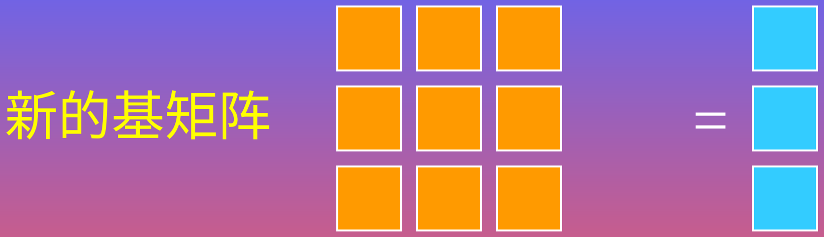


目标函数

约束条件

＝

右边常数



新的基矩阵

＝

由于从一个基变换到另一个基可以实现从可行域的一个顶点转移到另一个顶点，则存在以下两个问题：

（1）**最优性检验**：什么时候到了最优顶点。

（2）**进基和出基变量的确定**：如何转移可以使目标函数得到改进？

最优性检验：假设线性规划问题一开始就可以找到单位阵作为初始基：

$$
\left\{
\begin{array}{llllll}
\max\ z = & c_1 x_1 + c_2 x_2 + & & \dots & + c_n x_n & \\
\text{s.t.} & x_1 & & + a_{1\,m+1} x_{m+1} + & \dots + a_{1\,n} x_n & = b_1 \\
 & & x_2 & + a_{2\,m+1} x_{m+1} + & \dots + a_{2\,n} x_n & = b_2 \\
 & & & \dots \quad \dots & \dots & \\
 & & x_m & + a_{m\,m+1} x_{m+1} + & \dots + a_{m\,n} x_n & = b_m \\
 & x_1, \; x_2, \; \dots, \; x_n \geq 0 & & & &
\end{array}
\right.
$$

用 x_i （i =1，...，m）表示基变量，x_j （$j = m$+1，...，n）表示非基变量.
对于第 i (i =1，...，m)个约束条件有:

$$x_i = b_i - (a_{i\,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{i\,n} x_n) = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j$$

由于 $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \quad \ldots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$

把 $x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j$ 代入上式得:

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}) x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$ ，令 $\delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = c_j - z_j$ ， $z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \delta_j x_j$$

其中 δ_j 叫做检验数.

(1) 最优性检验：

如果所有的 $\delta_j \leq 0$, 则 z_0 就是最优解。因为 $x_j \geq 0$， $\sum_{j=m+1}^{n} \delta_j x_j < 0$

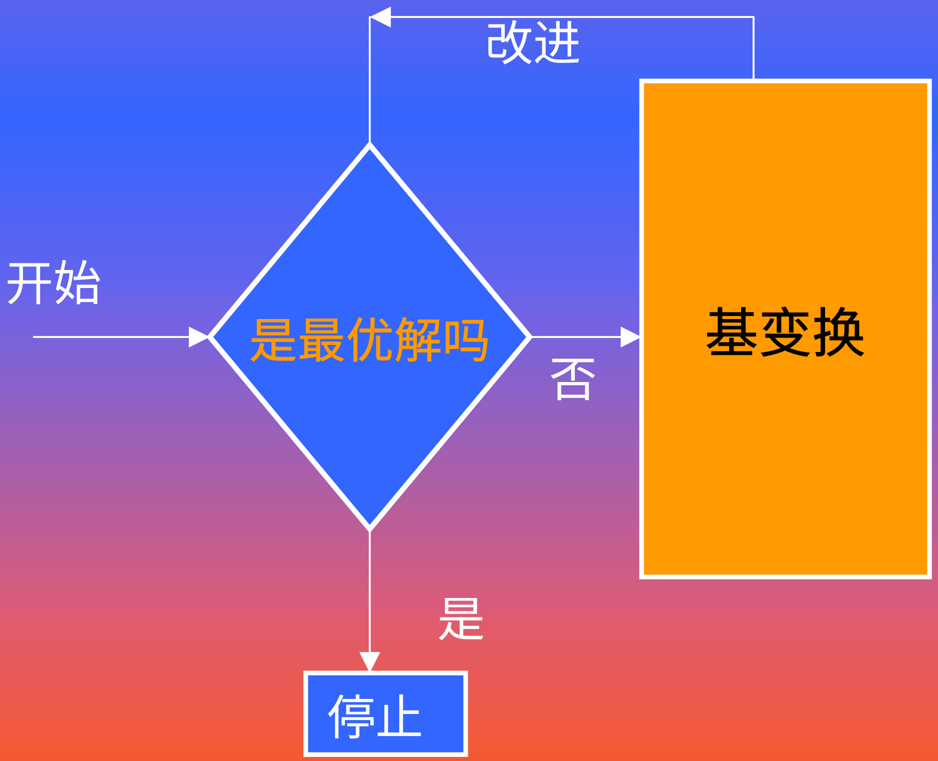
(2) 入基变量: 如果存在某个 $\delta_{j_0} > 0$, 则 把非基变量 x_{j0} 变为基变量，就可以不取0,

样 $\delta_{j_0} x_{j_0} > 0$ ， 目标函数会更大.

(3) 出基变量:

为了保证变换后求得的解是可行的，即这种变换是从可行域中的一个顶点到另一个顶点，故选取满足以下条件的变量出基 x_{i0}：

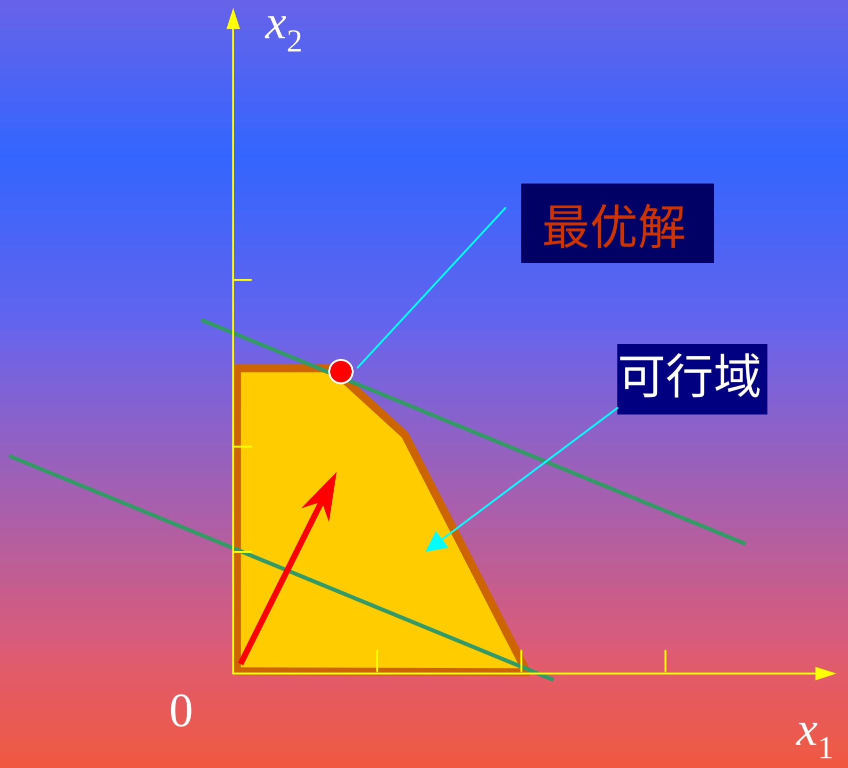
$$\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \min\{\frac{b_i}{a_{ij_0}} \mid a_{ij_0} > 0, i = 1,2,\ldots,m\}$$



单纯形表

例1　对以下线性规划问题求解：

$$\begin{cases} \max z = 50x_1 + 100x_2 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_目标函数} \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 300 & \\ 2x_1 + x_2 \leq 400 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_约束条件} \\ x_2 \leq 250 & \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \end{cases}$$



写成标准化形式

$$
\left\{
\begin{array}{llllllll}
\max z = 50\,x_1 + 100\,x_2 & & & & & & & \text{——目标函数} \\
\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 & & & = 300 & & & & \\
2\,x_1 + x_2 \quad + x_4 & & & = 400 & & & & \text{—— 约束条件} \\
x_2 \quad + x_5 & & & = 250 & & & & \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & & & \geq 0 & & & &
\end{array}
\right.
$$

写出单纯形表

迭代次数	X_b	C_b	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	100	0	0	0		
0	x_3	0	1	1	1	0	0	300	300/1
	x_4	0	2	1	0	1	0	400	400/1
	x_5 ↑	0	0	1	0	0	1	250	250/1
	δ_j		50	100	0	0	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	100	0	0	0		
0	x_3	0	1	1	1	0	0	300	300/1
	x_4	0	2	1	0	1	0	400	400/1
	x_5	0	0	1	0	0	1	250	250/1
	δ_j		50	100	0	0	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	100	0	0	0		
1	x_3	0	1	0	1	0	-1	50	50/1
	x_4	0	2	0	0	1	-1	150	150/2
	x_2	100	0	1	0	0	1	250	----
	δ_j		50	0	0	0	-10 0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	100	0	0	0		
2	x_1	50	1	0	1	0	-1	50	
	x_4	0	0	0	-2	1	1	50	
	x_2	100	0	1	0	0	1	250	
	δ_j		0	0	-5 0	0	-5 0	27500	

求目标函数最小的线性规划问题

例1　对以下线性规划问题求解：

$$\left\{\begin{array}{ll} \min f = 2x_1 + 3x_2 & \underline{\qquad\qquad}\text{目标函数} \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \geq 350 & \\ \qquad x_1 \qquad\quad \geq 125 & \underline{\qquad\qquad}\ \text{约束条件} \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leq 600 & \\ \quad x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

该线性规划问题与下列线性规划问题的最优解相同，最优值互为相反数。

$$\left\{\begin{array}{ll} \max -f = -2x_1 - 3x_2 & \underline{\qquad\qquad}\text{目标函数} \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 - s_1 \qquad\quad = 350 & \\ \qquad x_1 \qquad\quad - s_2 \qquad = 125 & \underline{\qquad\qquad}\ \text{约束条件} \\ \qquad 2x_1 + x_2 \qquad\quad + s_3 = 600 & \\ \quad x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 & \end{array}\right.$$

由于不能找到初始基为单位阵的列向量组成，因此，采用直接加入列向量的方法来构造这样的矩阵，并在目标函数中减去人工变量乘以M，这种方法叫大M法

$$\begin{cases} \max -f = -2\,x_1 - 3\,x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 - s_1 = 350 \\ \qquad x_1 - s_2 = 125 \\ \qquad 2x_1 + x_2 + s_3 = 600 \\ \qquad x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{cases}$$

——— 线性规划（1）

在上述线性规划中加入人工变量后，变为以下形式：

$$\begin{cases} \max -f = -2\,x_1 - 3\,x_2 - M\,a_1 - Ma_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 350 \\ \qquad x_1 - s_2 + a_2 = 125 \\ \qquad 2x_1 + x_2 + s_3 = 600 \\ \qquad x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{cases}$$

——— 线性规划（2）

若线性规划（2）的最优解中人工变量不为0，则线性规划（1）无可行解。

证明：如果线性规划（1）存在最优解，将会与若线性规划（2）的最优解中人变量不为0矛盾

若人工变量为0，则若线性规划（2）的最优解就是线性规划（1）的最优解。

若人工变量为0，则若线性规划（2）的最优解是线性规划（1）的可行解，并且由于线性规划（2）的解集包含线性规划（1）的解集，因此，得证。

$$\begin{cases} \max -f = -2x_1 - 3x_2 - Ma_1 - Ma_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 350 \\ \qquad\quad x_1 - s_2 + a_2 = 125 \\ \qquad\quad 2x_1 + x_2 + s_3 = 600 \\ \qquad\quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

写出单纯形表

迭代次数	X_b	C_b	↓ x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	b	θ_i
			-2	-3	0	0	0	-M	-M		
0	a_1	-M	1	1	-1	0	0	1	0	350	350/1
	a_2 ↑	-M	①	0	0	-1	0	0	1	125	125/1
	s_3	0	2	1	0	0	1	0	0	600	600/2
	δ_j		2M-2	M-3	-M	-M	0	0	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	s_1	↓ s_2	s_3	a_1	a_2	b	θ_i
			-2	-3	0	0	0	-M	-M		
1	a_1	-M	0	1	-1	1	0	1	-1	225	225/1
	x_1	-2	1	0	0	-1	0	0	1	125	---
	s_3 ↑	0	0	1	0	②	1	0	-2	350	350/2
	δ_j		0	M-3	-M	M-2	0	0	-2M+2		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	s_1	↓ s_2	s_3	a_1	a_2	b	θ_i
			-2	-3	0	0	0	-M	-M		
1	a_1	-M	0	1	-1	1	0	1	-1	225	225/1
	x_1	-2	1	0	0	-1	0	0	1	125	---
	s_3 ↑	0	0	1	0	$\boxed{2}$	1	0	-2	350	350/2
	δ_j		0	M-3	-M	M-2	0	0	-2M+2		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	↓ x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	b	θ_i
			-2	-3	0	0	0	-M	-M		
2	a_1 ↑	-M	0	$\boxed{1/2}$	-1	0	-1/2	1	0	50	100
	x_1	-2	1	1/2	0	0	1/2	0	0	300	600
	s_2	0	0	1/2	0	1	1/2	0	-1	175	350
	δ_j		0	-2+M/2	-M	0	1-M/2	0	-M		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	b	θ_i
			-2	-3	0	0	0	-M	-M		
3	x_2	-3	0	1	-2	0	-1	2	0	100	
	x_1	-2	1	0	1	0	1	-1	0	250	
	s_2	0	0	0	1	1	1	-1	-1	125	
	δ_j		0	0	-4	0	-1	-M+4	-M	-800	

几种特殊情况

- 无可行解的情况
- 无界解
- 无穷多解
- 退化问题

一　无可行解的情况

例1　对以下线性规划问题求解：

$$\left\{\begin{array}{ll} \max\ z = 20x_1 + 30x_2 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_目标函数} \\ \text{s.t.}\quad 3x_1 + 10x_2 \leq 150 & \\ \qquad x_1 \leq 30 & \text{———— 约束条件} \\ \qquad x_1 + x_2 \geq 40 & \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

该线性规划问题加入松弛变量、剩余变量、人工变量后可得到：

$$\left\{\begin{array}{ll} \max\ 20x_1 + 30x_2 & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_目标函数} \\ \text{s.t.}\quad 3x_1 + 10x_2 + s_1 = 150 & \\ \qquad x_1 + s_2 = 30 & \text{———— 约束条件} \\ \qquad x_1 + x_2 - s_3 + a_1 = 40 & \\ \qquad x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ a_1 \geq 0 & \end{array}\right.$$

写出单纯形表

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2 ↓	s_1	s_2	s_3	a_1	b	θ_i
			20	30	0	0	0	-M		
0	s_1 ↑	0	3	10	1	0	0	0	150	150/10
	s_2	0	1	0	0	1	0	0	30	-----
	a_1	-M	1	1	0	0	-1	1	40	40/1
	δ_j		M+20	M+30	0	0	-M	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2 ↓	s_1	s_2	s_3	a_1	b	θ_i
			20	30	0	0	0	-M		
0	s_1 ↑	0	3	10	1	0	0	0	150	150/10
	s_2	0	1	0	0	1	0	0	30	------
	a_1	-M	1	1	0	0	-1	1	40	40/1
	δ_j		M+20	M+30	0	0	-M	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1 ↓	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	b	θ_i
			20	30	0	0	0	-M		
1	x_2	30	3/10	1	1/10	0	0	0	15	150/3
	s_2 ↑	0	1	0	0	1	0	0	30	30/1
	a_1	-M	7/10	0	-1/10	0	-1	1	25	250/7
	δ_j		7M/10+11	0	-M/10-3	0	-M	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	b	θ_i
			20	30	0	0	0	-M		
2	x_2	30	0	1	1/10	-3/10	0	0	6	
	x_1	20	1	0	0	1	0	0	30	
	a_1	-M	0	0	-1/10	-7/10	-1	1	4	
	δ_j		0	0	-M/10-3	-7M/10-11	-M	0	780-4M	

$x_1 = 30$，$x_2 = 6$，$s_1 = 0$，$s_2 = 0$，$s_3 = 0$，$a_1 = 4$，$z = 780-4M$

由于人工变量不为0，因此，原线性规划问题无可行解，当然没有最优解。

比如：约束条件 $x_1 + x_2 \geq 40$不成立。

只要求线性规划的最优解里有人工变量不为0，则线性规划无可行解。

例1　对以下线性规划问题求解：

二　无界解的情况

例2　对以下线性规划问题求解：

$$\begin{cases} \max\ z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ \quad -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

对应的标准型

$$\begin{cases} \max\ z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 - x_2 + s_1 = 1 \\ \quad -3x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\ x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geq 0 \end{cases}$$

写出单纯形表

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b	θ_i
			1	1	0	0		
0	s_1	0	1	-1	1	0	1	1/1
	s_2	0	-3	2	0	1	6	---
	δ_j		1	1	0	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b	θ_i
			1	1	0	0		
0	s_1	0	1	-1	1	0	1	1/1
	s_2	0	-3	2	0	1	6	---
	δ_j		1	1	0	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b	θ_i
			1	1	0	0		
1	x_1	1	1	-1	1	0	1	1/1
	s_2	0	0	-1	3	1	9	---
	δ_j		0	2	-1	0		

从线性规划的单纯形表中可知：

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + s_1 &= 1 & &\Longrightarrow & x_1 &= 1 + x_2 - s_1 \\ - x_2 + 3s_1 + s_2 &= 9 & &\Longrightarrow & s_2 &= 9 + x_2 - 3s_1 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geq 0$$

令$s_1 = 0$，$x_2 = M$，则，$x_1 = 1+M$

$\max z = x_1 + x_2 = 2M+1$ 当M→无穷大时，z →无穷大。

因此：在某次迭代的单纯形表中，如果存在着一个大于0的检验数，并且该列的系数向量的每个元素都小于或等于0，则此线性规划问题是无界的。

三　无穷多解的情况

例3　对以下线性规划问题求解：

$$\begin{cases} \max z = 50x_1 + 50x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \leq 300 \\ 2x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_2 \leq 250 \\ x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

对应的标准型

$$\begin{cases} \max z = 50x_1 + 50x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 + x_3 = 300 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 250 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

对应的单纯形表：

迭代次数	X_b	C_b	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	50	0	0	0		
0	x_3	0	1	1	1	0	0	300	300/1
	x_4	0	2	1	0	1	0	400	400/1
	x_5 ↑	0	0	①	0	0	1	250	250/1
	δ_j		50	50	0	0	0		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	50	0	0	0		
0	x_3	0	1	1	1	0	0	300	300/1
	x_4	0	2	1	0	1	0	400	400/1
	x_5 ↑	0	0	1	0	0	1	250	250/1
	δ_j		50	50	0	0	0		

迭代次数	X_b	C_b	↓ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	50	0	0	0		
1	x_3 ↑	0	1	0	1	0	-1	50	50/1
	x_4	0	2	0	0	1	-1	150	150/2
	x_2	50	0	1	0	0	1	250	----
	δ_j		50	0	0	0	-50		

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	50	0	0	0		
2	x_1	50	1	0	1	0	-1	50	
	x_4	0	0	0	-2	1	1	50	
	x_2	50	0	1	0	0	1	250	
	δ_j		0	0	-5 0	0	0	15000	

根据单纯形表可知： 最优解是$x_1= 50$，$x_2= 250$，$x_3= 0$，$x_4= 0$， $x_5= 0$，最优解为 z =15000。

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	50	0	0	0		
2	x_1	50	1	0	1	0	-1	50	---
	x_4	0	0	0	-2	1	1	50	50/1
	x_2	50	0	1	0	0	1	250	250/1
	δ_j		0	0	-5 0	0	0	15000	

由于存在非基变量的检验数0，因此，继续迭代一次观察一下是否可以获得新的最优解？

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ_i
			50	50	0	0	0		
3	x_1	50	1	0	-1	1	0	100	
	x_5	0	0	0	-2	1	1	50	
	x_2	50	0	1	2	-1	0	200	
	δ_j		0	0	-5 0	0	0	15000	

根据单纯形表可知： 最优解是$x_1= 100$，$x_2= 200$，$x_3= 0$，$x_4= 0$， $x_5= 50$，最优解为 z =15000。

如果下面线性规划有两个不同的最优解，则它有无穷多最优解。

$$\begin{cases} \max\ z = \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{X} \\ \text{s.t.}\quad AX = B \\ \qquad\qquad X \geq 0 \end{cases}$$

设X_1，X_2是两个最优解，$0 \leq P \leq 1$，则 $PX_1 + (1-P)X_2$ 也是最优解.

因为: (1) $A(PX_1 + (1-P)X_2) = P(AX_1) + (1-P)(AX_2) = PB+(1-P)B=B$, 显然 $PX_1 + (1-P)X_2 \geq 0$, 因此是可行解.

(2) $\boldsymbol{C}^{T}(PX_1 + (1-P)X_2) = P(\boldsymbol{C}^{T}X_1) + (1-P)(\boldsymbol{C}^{T}X_2) = PZ+(1-P)Z=Z$, 因此, $PX_1 + (1-P)X_2$ 也是最优解.

对于某个最优的基本可行解,如果存在某个非基变量的检验数为0,

则此线性规划问题有无穷多最优解.

四　退化问题

在单纯形法计算过程中，基变量有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有了一个或几个基变量等于0，这称为退化。

例1　对以下线性规划问题求解：

$$\left\{\begin{array}{l} \max\ z = 2x_1 + 2/3\, x_3 \\ \text{s.t.}\quad x_1 - x_2 \leq 2 \\ \qquad 2x_1 + x_3 \leq 4 \\ \qquad x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ \qquad x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

该线性规划问题加入松弛变量化为标准形后，填入单纯形表得：

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	θ_i
			2	0	3/2	0	0	0		
0	s_1	0	1	-1	0	1	0	0	2	2/1
	s_2	0	2	0	1	0	1	0	4	4/2
	s_3	0	1	1	1	0	0	1	3	3/1
	δ_j		2	0	3/2	0	0	0	0	

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	θ_i
			2	0	3/2	0	0	0		
0	s_1	0	1	-1	0	1	0	0	2	2/1
	s_2	0	2	0	1	0	1	0	4	4/2
	s_3	0	1	1	1	0	0	1	3	3/1
	δ_j		2	0	3/2	0	0	0	0	

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	θ_i
			2	0	3/2	0	0	0		
1	x_1	2	1	-1	0	1	0	0	2	---
	s_2	0	0	2	1	-2	1	0	0	0/2
	s_3	0	0	2	1	-1	0	1	1	3/1
	δ_j		0	2	3/2	-2	0	0	4	

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	θ_i
			2	0	3/2	0	0	0		
2	x_1	2	1	0	1/2	0	1/2	0	2	4
	x_2	0	0	1	1/2	-1	1/2	0	0	0
	s_3	0	0	0	0	0	-1	1	1	---
	δ_j		0	0	1/2	0	-1	0	4	

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3 ↓	s_1	s_2	s_3	b	θ_i
			2	0	3/2	0	0	0		
2	x_1	2	1	0	1/2	0	1/2	0	2	4
	x_2 ↑	0	0	1	1/2	-1	1/2	0	0	0
	s_3	0	0	0	0	0	-1	1	1	---
	δ_j		0	0	1/2	0	-1	0	4	

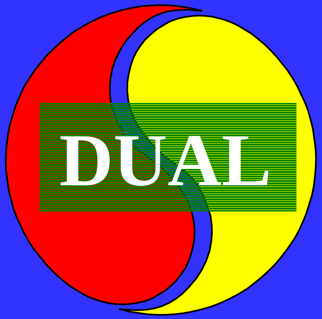
迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1 ↓	s_2	s_3	b	θ_i
			2	0	3/2	0	0	0		
3	x_1	2	1	-1	0	1	0	0	2	2/1
	x_3 ↑	2/3	0	2	1	-2	1	0	0	---
	s_3	0	0	0	0	1	-1	1	1	1/1
	δ_j		0	-1	0	1	-3/2	0	4	

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	θ_i
			2	0	3/2	0	0	0		
4	x_1	2	1	-1	0	0	1	-1	2	
	x_3	2/3	0	2	1	0	-1	2	2	
	s_1	0	0	0	0	1	-1	1	1	
	δ_j		0	-1	0	0	-1/2	-1	5	

第四章　对偶线性规划

◁

- ▷ 线性规划的对偶问题
- ▷ 对偶单纯形法



一　线性规划的对偶问题

本部分将（1）揭示原问题与对偶问题的关系　（2）将原问题转化成对偶问题

首先，看一个例子：

例 1　某公司在一周内只生产两种产品：产品A和产品B，产品A的利润为每千克50元，产品B的利润为每千克100元。产品A和产品B由三种设备加工而成，

	产品A	产品B	资源约束
设备1	1	1	300台时
设备2	2	1	400台时
设备 3	0	1	250 台时

问如何生产各种产品利用最大？

由第2章例题1可知，设x_1— 代表生产产品A的数量，x_2— 代表生产产品B的数量

本问题的数学模型为：

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 300 \\ 2x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_2 \leq 250 \\ x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题：下面从来一个角度考虑这个问题，假设另一个厂来租设备1，2，3，那么，该厂应该如何确定合理的租金呢？

设y_1、 y_2、 y_3—分别代表出租设备1，2，3每台时获得的利润。

则有：

$$\left\{\begin{array}{l} \min z = 300\, y_1 + 400\, y_2 + 250\, y_3 \text{—出租设备1，2，3的利润} \\ \text{s.t.}\quad y_1 + 2\, y_2 \geq 50 \\ \qquad y_1 + y_2 + y_3 \geq 100 \\ \qquad y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

约束条件：表示生产1单位产品A所需要的台时数出租后的利润要比生产产品A的利用要大，否则自己生产

练习：**应用单纯形法可算得最优解为：** $y_1= 50$， $y_2 =0$，$y_3= 50$，**最优值275000元。 设备1和3获利50元/台时，设备2按成本出租。**

这样的两个问题是从不同角度来考虑一个工厂的最大利润问题：所建立的模型就是一对对偶问题，对出租者来说这钱不比自己生产少，对租用者这是出租者愿意出租的最小费用。其中一个叫**原问题**，另一个叫**对偶问题**。

一、原问题与对偶问题的关系

原始问题

$\max z = C^T X$

$\text{s.t. } AX \leq b$

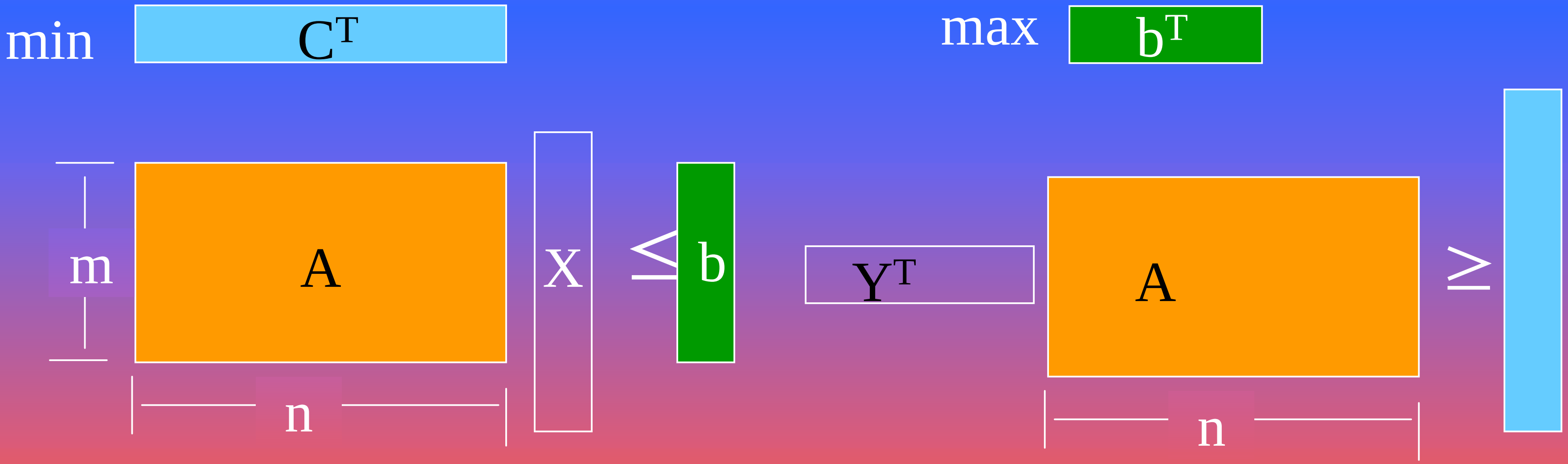
$X \geq 0$

对偶问题

$\min f = b^T Y$

$\text{s.t. } Y^T A \geq C$

$Y \geq 0$



例1 写出线性规划的对偶规划

原始问题

$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$\text{s.t.} \quad 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 \leq 440$

$6x_1 - 4x_2 - x_3 \geq 100$

$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 200$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

对偶问题

$\min z = 440y_1 - 100y_2 + 200y_3$

$\text{s.t.} \quad 2y_1 - 6y_2 + 5y_3 \geq 3$

$3y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 4$

$6y_1 + y_2 + y_3 \geq 6$

$y_1, y_2 \geq 0$

原始问题

$\max z = C^T X$

$\text{s.t.} \quad AX \leq b$

$X \geq 0$

对偶问题

$\min f = b^T Y$

$\text{s.t.} \quad Y^T A \geq C$

$Y \geq 0$

原始问题

$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$\text{s.t.} \quad 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 \leq 440$

$-6x_1 + 4x_2 + x_3 \leq -100$

$5x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 200$

$-5x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -200$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

对偶问题

$\min z = 440y_1 - 100y_2 + 200y_{31} - 200y_{32}$

$\text{s.t.} \quad 2y_1 - 6y_2 + 5y_{31} - 5y_{32} \geq 3$

$3y_1 + 4y_2 + 3y_{31} - 3y_{32} \geq 4$

$6y_1 + y_2 + y_{31} - y_{32} \geq 6$

$y_1, y_2, y_{31}, y_{32} \geq 0$

例2 写出线性规划的对偶规划

原始问题

$$\min z = 3x_1 + 9x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 180 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 60 \\ & 5x_1 + 3x_2 \ge 240 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

对偶问题

$$\max\ z = 180y_1 - 60y_2 + 240y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & y_1 - 2y_2 + 5y_3 \le 3 \\ & 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \le 9 \\ & 3y_1 - y_2 = 4 \\ & y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

对偶问题

$$\max z = C^T X$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & AX \le b \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

原始问题

$$\min f = b^T Y$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & Y^T A \ge C \\ & Y \ge 0 \end{aligned}$$

原始问题

$$\min z = 3x_1 + 9x_2 + 4x_{31} - 4x_{32}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + 3x_{31} - 3x_{32} \ge 180 \\ & -x_1 - 2x_2 - 3x_{31} + 3x_{32} \ge -180 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_{31} + x_{32} \ge -60 \\ & 5x_1 + 3x_2 \ge 240 \\ & x_1,\ x_2,\ x_{31},\ x_{32} \ge 0 \end{aligned}$$

对偶问题

$$\max\ z = 180y_{11} - 180y_{12} - 60y_2 + 240y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & y_{11} - y_{12} - 2y_2 + 5y_3 \le 3 \\ & 2y_{11} - 2y_{12} + 3y_2 + 3y_3 \le 9 \\ & 3y_{11} - 3y_{12} - 3y_2 \le 4 \\ & -3y_{11} + 3y_{12} + y_2 \le -4 \\ & y_{11},\ y_{12},\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

一　对偶单纯形法

对偶单纯形法和单纯形法一样都是求解原线性规划问题的一种方法，

两种方法的区别：（1）单纯形法是保持原问题的所有约束条件的常数大于等于0的情况下，通过迭代，使得所有检验数都小于等于0。

（2）对偶单纯形法是保持原问题所有检验数都小于等于0的情况下，通过迭代，使得原问题的所有约束条件的常数大于等于0。

对偶单纯形法的优点：（1）初始解可以是不可行的，对大于等于0的约束不需加入人工变量。

对偶单纯形法的缺点：（1）很难找到初始解使得它的所有检验数都小于等于0。

首先，看一个例子：

出基变量：找一个最小的负常数。若无，则得最优解

入基变量：取最下值。 若所有$a_{kj} \ge 0$，则无可行解

写出单纯形表

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
			50	100	0	0	0	
0	x_1	50	1	0	1	0	-1	100
	x_4	0	0	0	-2	1	1	-50
	x_2	100	0	1	0	0	1	250
	δ_j		0	0	-50	0	-50	
	$\delta_j/a_{kj}(a_{kj}<0)$		---	---	50/2	---	---	

迭代次数	X_b	C_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
			50	100	0	0	0	
0	x_1	50	1	0	0	1/2	-1/2	75
	x_3	0	0	0	1	-1/2	1/2	25
	x_2	100	0	1	0	0	1	250
	δ_j		0	0	0	-25	-75	28750
	$\delta_j/a_{kj}(a_{kj}<0)$							

一　运输问题模型

- 运输问题是一种特殊的线性规划问题。由于这类线性规划问题在结构上具有一定的特殊性，因此，它们可以用比单纯形法更简单的方法（表上作业法）进行求解。
- 运输问题在工商管理中具有广泛的应用，这也是我们把运输问题单列出来的理由。
- 这章我们要讨论运输问题的模型和应用

例1 某公司从两个产地A_1， A_2将货物运往销地B_1， B_2， B_3，有关情况如下表，问如何调运，费用最小？

表 1 运费单价表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量（件）
A_1	6	4	6	200
A_2	6	5	5	300
销售	150	150	200	500 500

解：设产地i运往销地j的货物为x_{ij}，则安排的运输量如下表2所示。

表 2 运量安排表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量（件）
A_1	x_{11} ＋	x_{12} ＋	x_{13} ＝	200
	＋	＋	＋	
A_2	x_{21} ＋	x_{22} ＋	x_{23} ＝	300
	＝	＝	＝	
销售	150	150	200	

$$\begin{cases} \min\ 6x_{11}+4x_{12}+6x13+6x_{21}+5x_{22}+5x_{23} \\ \text{s.t.}\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=200 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=300 \\ x_{11}+x_{21}=150 \\ x_{12}+x_{22}=150 \\ x_{13}+x_{23}=200 \\ \boldsymbol{x}_{ij}\geq 0\text{，}\ i=1,2,\ j=1,2,3 \end{cases}$$

运用应用软件解得: $x_{11}=50$, $x_{12}=150$, $x_{13}=0$, $x_{21}=100$, $x_{22}=0$, $x_{23}=200$， $Z=2500$

一般形式的产销平衡运输问题

解：设产地i运往销地j的货物为x_{ij}，则安排的运输量如下表2所示。

表 1　运费单价表

销地 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量（件）
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2
…			…		…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	S_n
销售	d_1	d_2	…	d_n	

$$\begin{cases} \text{目标函数} \min f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, i = 1,2,\ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, j = 1,2,\ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \text{，} i=1,\ldots,m \quad j=1,\ldots, n \end{cases}$$

运输问题的变化形式：

（1）有时是求目标函数最大。比如有时求利润最大营业额最大。

（2）有时某些运路上有运额限制，这时要加上相应的约束。

（3）当产销不平衡时要经过特殊处理，请看下节。

2 产销平衡与不平衡的运输问题

应用线性规划方法求解线性规划问题的优缺点：

（1）优点是计算机输出的信息多，可以进行灵敏度分析。可以给出运费单价在什么范围内变化最优解不变。产量和销量的对偶价格是多少等信息。

（2）其缺点是输入信息较麻烦，又因为计算机求解线性规划问题的程序相对麻烦，因此能解决的运算问题的规模相对小一些。

产销平衡与不平衡的运输问题：

（1）上节我们讨论的问题就是产销平衡问题：它主要是指生产的量和需求的量相

（2）产销不平衡问题是指生产量和需求量不等。

对于产销不平衡问题可以化成产销平衡问题来求解。

例2 某公司从两个产地A_1， A_2将货物运往销地B_1， B_2， B_3，有关情况如下表，问如何调运，费用最小？

表 1　运费单价表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量（件）
A_1	6	4	6	300
A_2	6	5	5	300
销售	150	150	200	600 500

表 2　运费单价表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_3	产量（件）
A_1	6	4	6	0	300
A_2	6	5	5	0	300
销售	150	150	200	100	600 600

分析：（1）假象仓库

（2）价格确定。

（3）产销平衡表的转化。

运用应用软件解得: $x_{11} = 50$, $x_{12} =150$, $x_{13} =0$, $x_{14} =100$, $x_{21} = 100$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 200$, $x_{24} =0$, $Z=2500$

例3 某公司从两个产地A_1， A_2将货物运往销地B_1， B_2， B_3，有关情况如下表，问如何调运，费用最小？

表 1 运费单价表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量（件）
A_1	6	4	6	200
A_2	6	5	5	300
销售	250	200	200	500 650

表 1 运费单价表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量（件）
A_1	6	4	6	200
A_2	6	5	5	300
A_3	0	0	0	150
销售	250	200	200	650 650

分析：（1）假象产地

（2）价格确定。

（3）产销平衡表的转化。

运用应用软件解得: $x_{11} = 0$, $x_{12} =200$, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 100$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 200$, $x_{31} = 150$， $x_{32} =0$, $x_{33} = 0$, Z=2400

3 运输问题的应用

- ▷ 产销不平衡的运输问题
- ▷ 生产与存储问题
- ▷ 转运问题
- ▷ 案例分析

一产销不平衡的运输问题

例 4　石家庄北方研究院有关用煤情况如图所示，由于需求大于供给，经院研究决定一区的供应量可以减少0 ~ 200吨，二区要全部满足，三区不少于1700吨，试求运费最低的调运方案。

表 2　运费单价表

销地 产地	一区 $_1$	一区 $_2$	二区	三区 $_1$	三区 $_2$	供应量
山西盂县	1300		1000	1700		4000
河北临城	1500					1500
假想产地		200			300	500
需求量	2800	200	1000	1700	300	6000 6000

用运筹学软件可算得结果是: x_{11} =1300, x_{13} = 1000 , x_{14} = 1700 , x_{21} = 1500, x_{32} = 200 , x_{35} = 300 , 其余变量都为0，总运费为9220百元。

例 5　　三个化肥厂供应四个地区的农用化肥，试求运费最低的调运方案。

表 2　运费单价表

销地 产地	一’	一’’	二	三	四’	四’’	产量
A			50				50
B			20		10	30	60
C	30	20	0				50
假象产地 D				30		20	50
销量	30	20	70	30	10	50	210 210

用运筹学软件可算得结果总运费为2460万元。

二 生产与存储问题

例 6 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10、15、25、20台同一规格柴机。如果当季不交货，每台每季度额外交费0。15万元。问如何安排生产费用最小？

交货季度 生产季度	1	2	3	4	生产量
1	10.8	10.8+0.15	10.8+0.3	10.8+0.45	25
2		11.1	11.1+0.15	11.1+0.3	35
3			11	11+0.15	30
4				11.3	10
需求量	10	15	25	20	

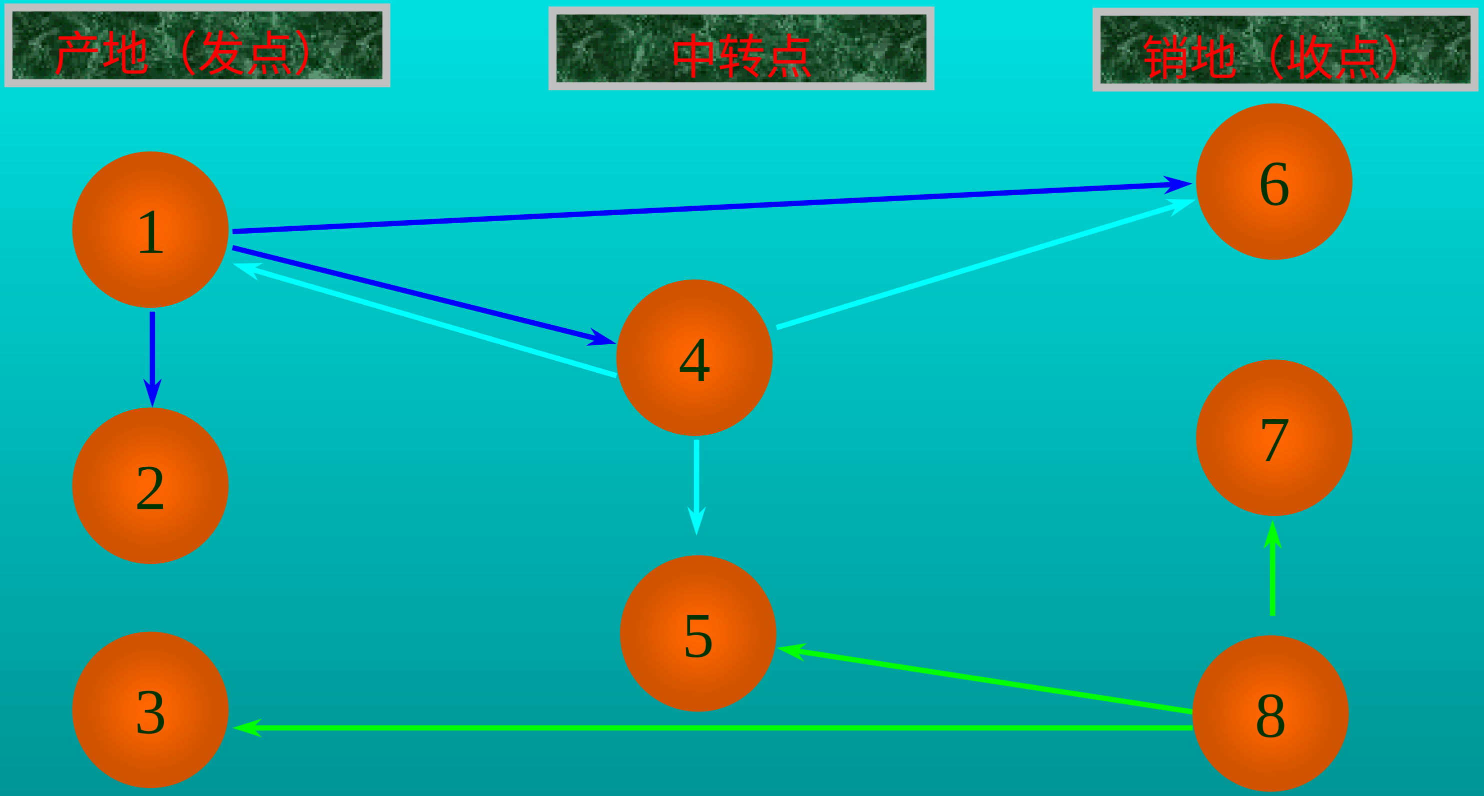
解：设x_{ij}为第i季度生产第j季度交货的柴油机数量。

$$\left\{\begin{array}{lll} \min & \multicolumn{2}{l}{10.8x_{11}+(10.8+0.15)x_{12}+(10.8+0.3\ )x_{13}+(10.8+0.45)x_{14}+\ \ldots\ +11.3x_{44}} \\ \text{s.t.} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=25 & x_{11}=10 \\ & x_{22}+x_{23}+x_{24}=35 & x_{12}+x_{22}=15 \\ & x_{33}+x_{34}=35 & x_{13}+x_{23}+x_{33}=25 \\ & x_{44}=10 & x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=20 \\ & \multicolumn{2}{l}{x_{ij}\geq 0,\quad i=1,2,3,4,\ \ j=1,2,3,4} \end{array}\right.$$

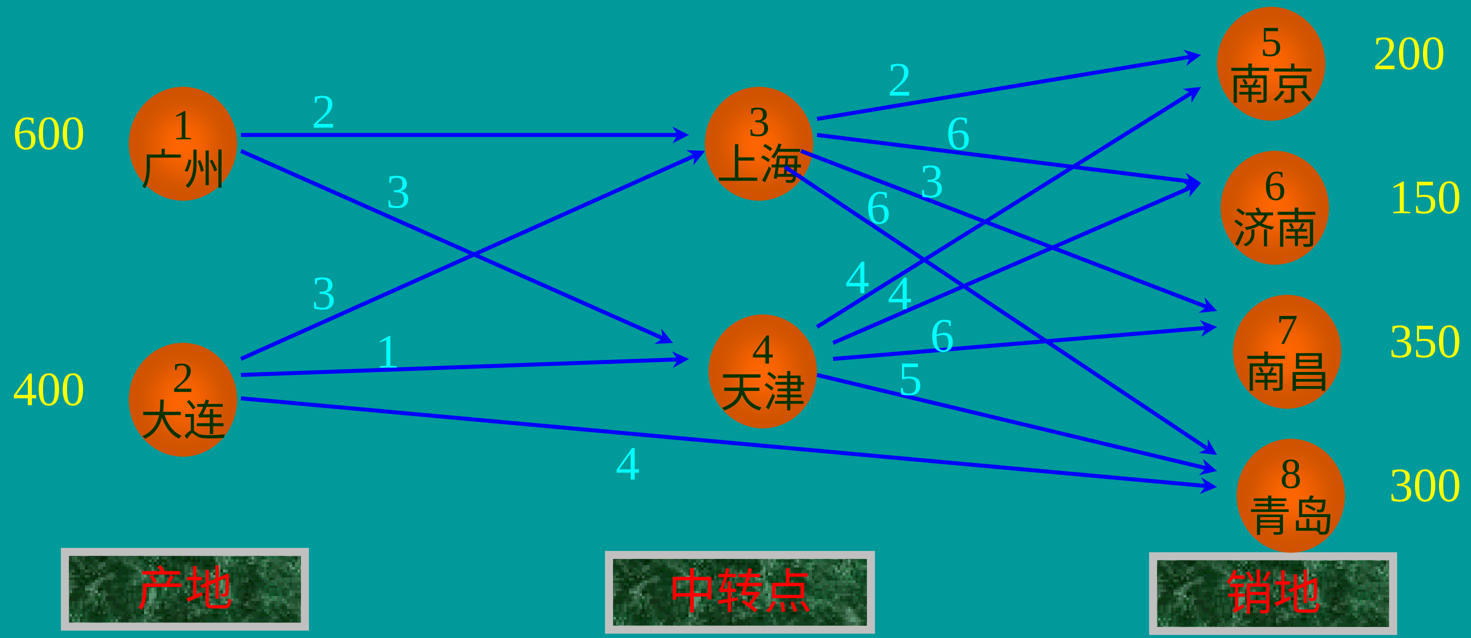
销地 产地	1	2	3	4	D	产量
1	10.8	10.8+0.15	10.8+0.3	10.8+0.45	0	25
2	M	11.1	11.1+0.15	11.1+0.3	0	35
3	M	M	11	11+0.15	0	30
4	M	M	M	11.3	0	10
销量	10	15	25	20	30	

销地 产地	1	2	3	4	D	产量
1	10	15	0			25
2			0	5	30	35
3			25	5		30
4				10		10
销量	10	15	25	20	30	

三　转运问题



例8　腾飞产品，有关数据如表所示，问如何调运，总运费最小？



解:　设 x_{ij}表示从i地运往j 地的产品量。

$$\min\ 2x_{13}+3x_{14}+3x_{23}+x_{24}+4x_{28}+2x_{35}+6x_{36}+3x_{37}+6x_{38}+4x_{45}+4x_{46}+6x_{47}+5x_{48}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{s.t.} & x_{13}+x_{14}\le 600 \\ & x_{35}+x_{45}=200 \\ & x_{36}+x_{46}=150 \\ & x_{37}+x_{47}=350 \\ & x_{38}+x_{48}=300 \\ & x_{13}+x_{23}-x_{35}-x_{36}-x_{37}-x_{38}=0 \\ & x_{14}+x_{24}-x_{45}-x_{46}-x_{47}-x_{48}=0 \\ & x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3 \end{array}\right.$$

一般形式的转运问题模型

解：设i地运往j地的货物为x_{ij}，则

目标函数 $$\min \underset{对所有的弧}{\sum\sum} c_{ij}x_{ij}$$

$$0 \le \underset{所有流出量}{\sum} x_{ij} - \underset{所有流入量}{\sum} x_{ij} \le s_i$$

对发点I

$$\underset{所有流入量}{\sum} x_{ij} - \underset{所有流出量}{\sum} x_{ij} = 0$$

对中转点

$$\underset{所有流入量}{\sum} x_{ij} - \underset{所有流出量}{\sum} x_{ij} = d_j$$

对收点J

$x_{ij} \ge 0$，对所有的 i 和 j

例 9　某厂有3个分厂生产某种产品，运往4个地区销售，问如何调运，费用最小？

表 1　运费单价表

销地 产地	B_1	B_1	B_1	B_1	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	20 20

几个问题：

（1）因为所有产地、销地和中转站都可以有运入和运出量，因此，即可以看成产地也可以看成销地。可以扩大为11个产地和11个销地。

（2）所有中转站的流入量等于流出量，因此，产量等于销量。由于运费最小，因此，不可能出现一批物质来回调运的情况，所以，中转站的转运量不会超过20吨．流入量：$\sum x_{ij} \le s_i$，　（松弛量）$x_{ii} + \sum x_{ij} = 20$

流出量：$\sum x_{ij} \ge d_j$ ，　（剩余量）$x_{ii} + \sum x_{ij} = 20$

（3）由于产地和销地也有转运的作用，因此，应在原来基础上，增加20吨。

表 1　运费单价表

	A_1	A_2	A_3	T_1	T_2	T_3	T_4	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0	1	3	2	1	4	3	3	11	3	10	27
A_2	1	0	M	3	5	M	2	1	9	2	8	24
A_3	3	M	0	1	M	2	3	7	4	10	5	29
T_1	2	3	1	0	1	3	2	2	8	4	6	20
T_2	1	5	M	1	0	1	1	4	5	2	7	20
T_3	4	M	2	3	1	0	2	1	8	2	4	20
T_4	3	2	3	2	1	2	0	1	M	2	6	20
B_1	3	1	7	2	4	1	1	0	1	4	2	20
B_2	11	9	4	8	5	8	M	1	0	2	1	20
B_3	3	2	10	4	2	2	2	4	2	0	3	20
B_4	10	8	5	6	7	4	6	2	1	3	0	20
销量	20	20	20	20	20	20	20	23	26	25	26	240 240

第六章　整数规划 ◁

- ▷ 整数规划的图解
- ▷ 整数规划的计算机求解
- ▷ 整数规划的应用
- ▷ 整数规划的分枝定界法
- ▷ 案例分析

一 整数规划的图解

1 基本概念：

纯整数规划：如果整数规划中所有变量都为非负整数，则称之为纯整数规划问题。

如果只有一部分变量为非负整数，则称为混合整数规划问题。

如果变量的取值只限为0和1，这样的变量称为0-1变量，如果所有变量都为0-1变量，则称为0-1规划。

第一节 整数规划的图解法

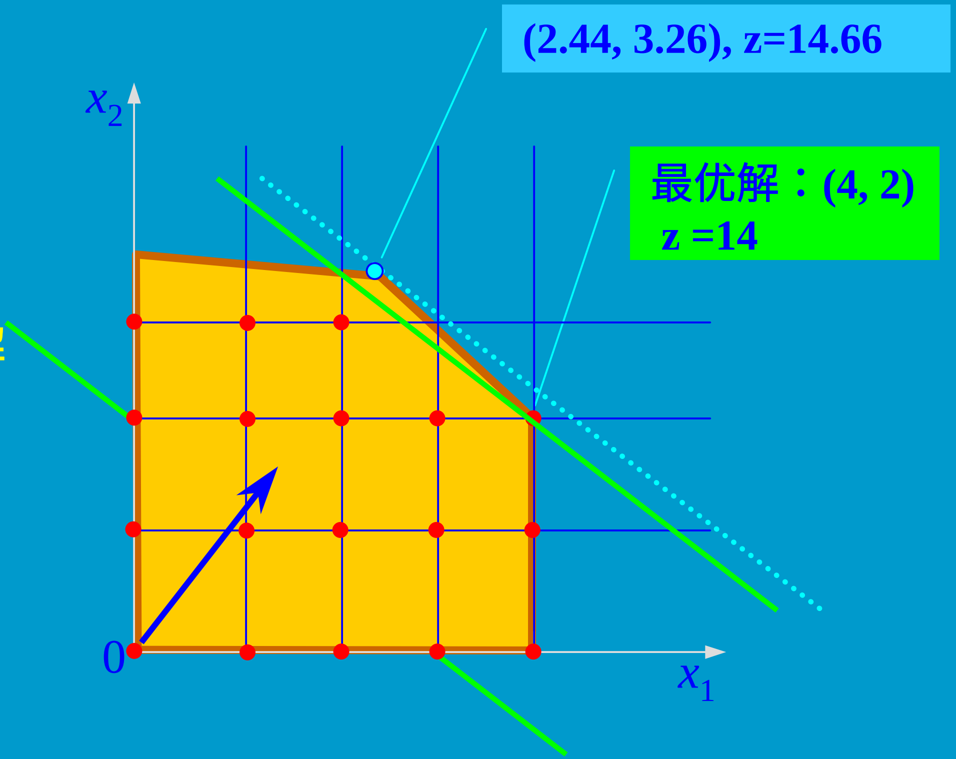
例1 某公司拟用集装箱托运甲、乙两种货物，有关情况如图所示。甲货物至多托运4件，问如何托运两种货物，利润最大？

解：设 x_1，x_2表示甲、乙货物托运的件数，则数学模型为：

$$\begin{cases} \max\ 2x_1+3x_2 \\ \text{s.t.}\quad 195x_1+273x_2\leq 1365 (\text{体积}) \\ 4x_1+40x_2\leq 140 \ (\text{重量}) \\ x_1 \leq 4 \ (\text{件数}) \\ x_1, x_2 \geq 0，\text{为整数。} \end{cases}$$

表 8-1

货物	每件体积	每件重量	每件利润
甲	195	4	2
乙	273	40	3
托运限制	1365	140	



注意：1 最优值不是通过四舍五入得到的，但四舍五入可以得到近似解

2 从可行域可知，加入整数约束，求最大值情况，最优解变小。求最小值情况，最优解变大。

二 整数规划的计算机求解

略

三 整数规划的应用

- 投资场所选择
- 固定成本问题
- 指派问题
- 分布系统设计
- 投资问题

1　投资场所选择

例4　某公司投资总额720万元，问如选择哪几个销售点，可使年利润最大？

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
投资额	100	120	150	80	70	90	80	140	160	180
利润	36	40	50	22	20	30	25	48	58	61
	≤ 2			≥ 1		≥ 1		≥ 2		

解: 设 $x_i = 0$ 或 1，1表示A_i被选择， 0 表示A_i没被选择。

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 36x_1+40x_2+50x_3+22X_4+20x_5+30x_6+25x_7+48x_8+58x_9+61x_{10} \\ \text{s.t. } 100x_1+120x_2+150x_3+80X_4+70x_5+90x_6+80x_7+140x_8+160x_9+180x_{10} \leq 720 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 2 \\ x_4+x_5 \geq 1 \\ x_6+x_7 \geq 1 \\ x_8+x_9+x_{10} \geq 2 \\ x_i \geq 0, \text{ 为 0-1 变量. } i = 1,2, \ldots ,10 \end{cases}$$

解得：$x_1 = 1$，$x_2 = 1$，$x_5 = 1$，$x_6 = 1$，$x_9 = 1$，$x_{10} = 1$，其余变量均为 0.
$Z = 720$ 万元

2 固定成本问题

固定费支出	100	150	200	
	小号容器	中号容器	大号容器	资源限制
金属板（吨）	2	4	8	500
劳动力（人月）	2	3	4	300
机器设备（台月）	1	2	3	100
利润（万元）	4	5	6	

例 5 制定一个生产计划，使得利润最大。

解：设x_1，x_2，x_3分别表示小、中、大号容器的生产数。

y_i =0或1.　当$x_i > 0$ 时，y_i =1。　当$x_i = 0$时，y_i =0。

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\min & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 500 & x_1 \leq 200\, y_1 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 300 & x_2 \leq 200\, y_2 \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 100 & x_3 \leq 200\, y_3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0,\quad y_1,\ y_2,\ y_3 \text{为 0-1变量。} &
\end{array}
\right.
$$

解得：$x_1 = 100$，$x_2 = 0$，$x_3 = 0$，$y_1 = 1$，$y_2 = 0$，$y_3 = 0$，$Z = 300$.

3 指派问题

指派问题：有N个任务由N个人来完成，若必须指派每个人来完成1项任务。问如何指派效率最大？

例 6 有4个人干4项不同工作， 所需时间如表所示，问如何指派，总时间最短？

解：设x_{ij} 为 0-1变量， $x_{ij} = 1$ 表示指派第*I* 个人去干第 *j* 件事。 $x_{ij} = 0$表示不指派第*I* 个人去干第 *j* 件事。

工作 工人	1	2	3	4
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

Min $15x_{11}+18x_{12}+21x_{13}+24x_{14}$

$19x_{21}+23x_{22}+22x_{23}+18x_{24}$

$26x_{31}+17x_{32}+16x_{33}+19x_{34}$

$19x_{41}+21x_{42}+23x_{43}+17x_{44}$

s.t.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$$

每个人干一件事

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1$$

每件事由一人干

x_{ij} 为 0-1变量，*i*，*j* = 1，2，3，4

解得： $x_{21}=1$ $x_{12}=1$， $x_{33}=1$， $x_{44}=1$。

有M个人N个任务的一般指派问题：设x_{ij} 为 0-1变量， $x_{ij} = 1$ 表示指派第I 个人去干第 j 件事。 $x_{ij} = 0$ 表示不指派第I 个人去干第 j 件事。分三种情况：

工作 工人	1	2	…	N
1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1N}
2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2N}
…	…	…	…	…
M	C_{M1}	C_{M2}	…	C_{MN}

（1） 有M个人，N个任务，M > N

$$\text{Min} \sum\sum C_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 1 \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1 \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 1 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 1 \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

每个人至多干一件事

每件事由一人干

x_{ij} 为 0-1变量，$i = 1$，…，M ，$j = 1$，…，N

工人 \ 工作	1	2	…	N
1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1N}
2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2N}
…	…	…	…	…
M	C_{M1}	C_{M2}	…	C_{MN}

（2） 有M个人，N个任务，M < N

$$\begin{cases} \text{Min} \sum\sum C_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1 \qquad x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \leq 1 \\ \quad x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1 \qquad x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \leq 1 \\ \quad x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1 \qquad x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} \leq 1 \\ \quad x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1 \qquad x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} \leq 1 \\ x_{ij} \text{ 为 0-1变量，} i=1,\ldots,M,\ j=1,\ldots,N \end{cases}$$

每个人干一件事

每件事至多由一人干

（3） 有M个人，N个任务，M= N.

多重指派问题：一般指派问题每个人只干一件事,多重指派问题一个人可以根据能力的大小干多件事.

这时只需把 $\sum x_{ij} \leq 1$, $i = 1$, …, M 改成

$\sum x_{ij} \leq a_i$, $i = 1$, …, M

这里 a_i 表示第 i 个人可以承担的任务数. 对不同的人, a_i 可以不同.

4 分布系统设计

例 7 某企业在A_1地有一个工厂，生产能力为30千箱，为扩大生产，打算在A_2, A_3, A_4 ,A_5地再建几个厂，有关情况见表，(1) 问如何建厂，才能既满足销量又使固定成本和总费用之和最小？(2) 由于政策需要必须在A_2或 A_3 地建1个厂，问应在哪几个地方建厂？

解:设x_{ij} 为从A_i运往B_j的运输量，y_i 是 0-1变量， $y_i = 1$ 表示A_i厂址被选中。

表 1　运费单价表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量(千箱)	建厂投入
A_1	8	4	3	30	
A_2	5	2	3	10	175
A_3	4	3	4	20	300
A_4	9	7	5	30	375
A_5	10	4	2	40	500
销售	30	20	20		

$$\text{Min } 8x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+5x_{21}+2x_{22}+3x_{23}+4x_{31}$$
$$+3x_{32}+4x_{33}+9x_{41}+7x_{42}+5x_{43}+10x_{51}+4x_{52}$$
$$+2x_{53}+175y_2+300y_3+375y_4+500y_5$$

$$\text{s.t.}\quad x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 30$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 10\,y_2$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 20\,y_3$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43} \leq 30\,y_4$$
$$x_{51}+x_{52}+x_{53} \leq 40\,y_5$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} = 30 \quad x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} = 20 \quad x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52} = 20$$

$x_{ij} \geq 0$，为整数， y_i为 0-1变量，I =1，2，3，j = 1，2，3，4，5

解得： $x_{11}=30$ $x_{52}=20$， $x_{53}=20$， $y_5=1$，其余变量为0, Z =860。

（2）第2个问题只需在原有约束条件中加入以下条件即可:

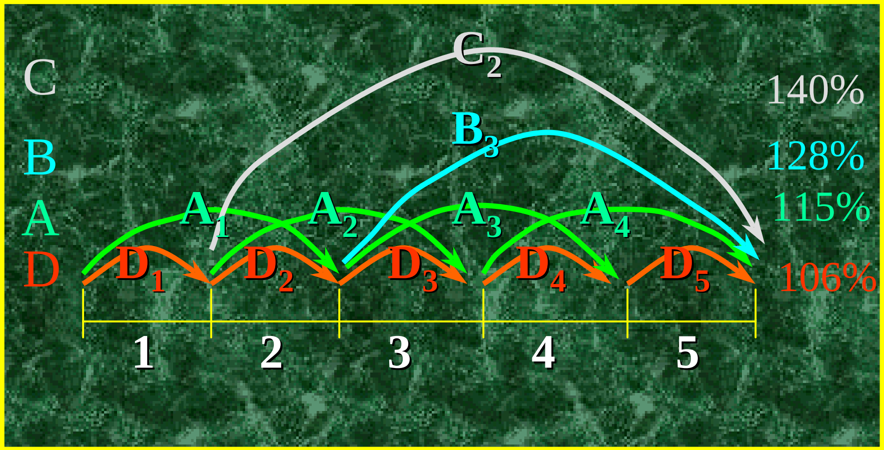
$$y_2+y_3=1$$

解得： $x_{22}=10$， $x_{41}=30$， $x_{12}=10$， $x_{13}=10$， $y_2=1$， $y_4=1$， 其余变量为0, Z =940。

5 投资问题

例 8 某部门现有资金10万元，准备投资以下项目：（1）A：第一年投资额不低于4万。（2）B：投资额最低3万，最高5万。（3）C：投资额只能是2，4，6，8万元之一。

问如何投资第五年末拥有本利金额最大？



解：设$x_{i\,j}$为第i年初投于j项目的 金额. y_{iA}，

y_{iB}是0-1变量， $y_{iJ}=1$ 表示投资。

y_{2C}=0, 1, 2, 3, 4，分别表示第2年投于

C项目的金额为0, 2, 4, 6, 8万元。

$$\max\ 1.15x_{4A}+1.28x_{3B}+1.4x_{2C}+1.06x_{5D}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{1A}+x_{1D}=10$$

$$x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=1.06\,x_{1D}$$

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15\,x_{1A}+1.06\,x_{2D}$$

$$x_{4A}+x_{4D}=1.15\,x_{2A}+1.06\,x_{3D}$$

$$x_{5D}=1.15\,x_{3A}+1.06\,x_{4D}$$

$$x_{1A}\geq 40000\,y_{1A}\qquad x_{1A}\leq 200000\,y_{1A}$$

（1）A：第一年投资额不低于4万。（2）B：投资额最低3万，最高5万。（3）C：投资额只能是2，4，6，8万元之一。

$$\max\ 1.15x_{4A} + 1.28x_{3B} + 1.4x_{2C} + 1.06x_{5D}$$

s.t. $x_{1A} + x_{1D} = 10$

$x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} = 1.06\, x_{1D}$

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} = 1.15\, x_{1A} + 1.06\, x_{2D}$

$x_{4A} + x_{4D} = 1.15\, x_{2A} + 1.06\, x_{3D}$

$x_{5D} = 1.15\, x_{3A} + 1.06\, x_{4D}$

$x_{1A} \geq 40000\ y_{1A}$ $x_{1A} \leq 200000\ y_{1A}$

$x_{3B} \geq 30000y_{3B}$ $x_{3B} \leq 50000\ Y3b$

$x_{2C} = 20000y_{2C}$

$y_{2C} \leq 4$

$x_{i\,j} \geq 0$，y_{1A}，y_{3B}为0-1变量，

y_{2C}为非负整数

当y_{1A} =1时，$x_{1A} \geq 40000$ $x_{1A} \leq 200000$

当y_{1A} =0时，$x_{1A} \geq 0$ ，$x_{1A} \leq 0$

当y_{3B} =1时，$30000 \leq x_{3B} \leq 50000$

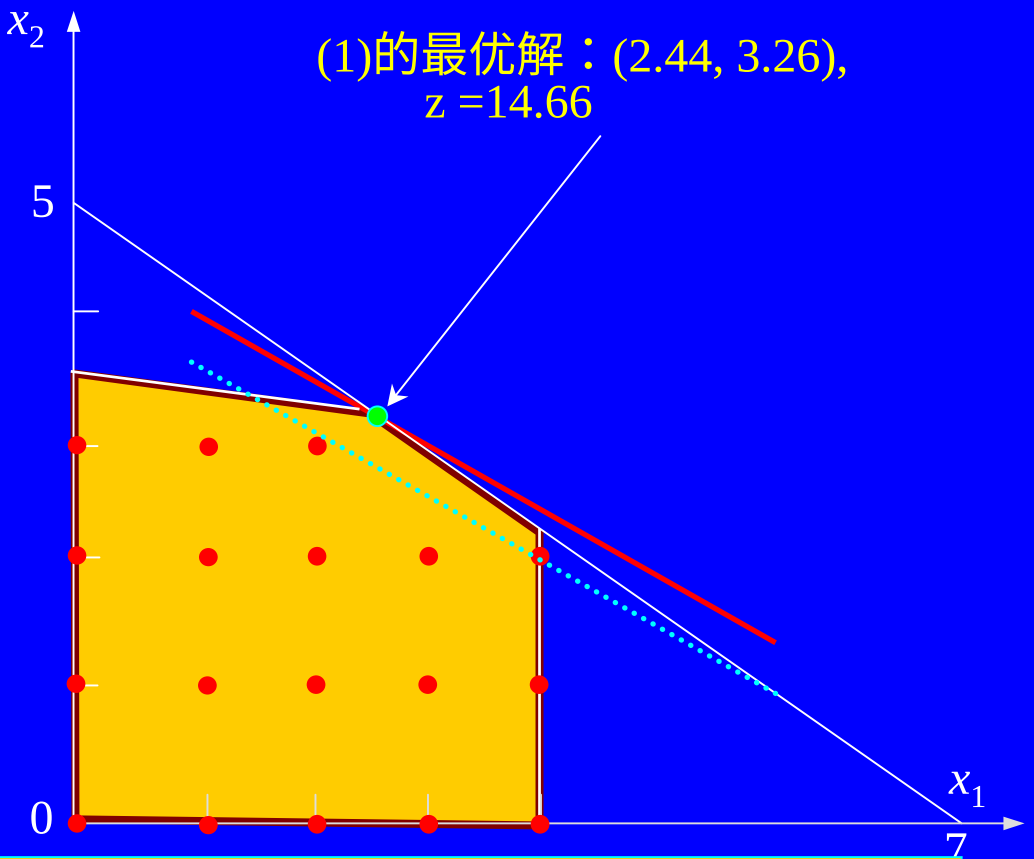
四 整数规划的分枝定界法

分枝定界法适合纯整数规划和混合整数规划问题，它首先求整数规划对应的线性规划问题的最优解，然后，通过划分可行域的办法，来求最优解。

例9 用分枝定界法解下列问题：

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Max } 2x_1+3x_2 \\ &\text{s.t.} \quad 195x_1+273x_2 \le 1365 \\ &\qquad 4x_1+40x_2 \le 140 \\ &\qquad x_1 \le 4 \\ &\qquad x_1,\ x_2 \ge 0 \text{ 为整数.} \end{aligned}\right. \qquad (0)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Max } 2x_1+3x_2 \\ &\text{s.t.} \quad 195x_1+273x_2 \le 1365 \\ &\qquad 4x_1+40x_2 \le 140 \\ &\qquad x_1 \le 4 \\ &\qquad x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}\right. \qquad (1)$$



取x_1=2, x_2 =3, Z_L =13，显然 Z_U = 14.66

取两变量中离整数远的那个变量分解.

$$\text{Max } 2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} \text{s.t. } 195x_1+273x_2 \le 1365 & \\ 4x_1+40x_2 \le 140 & (2) \\ x_1 \le 4 & \\ x_1 \le 2 & \\ x_1,\ x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

(2)的最优解：(2，3.3),

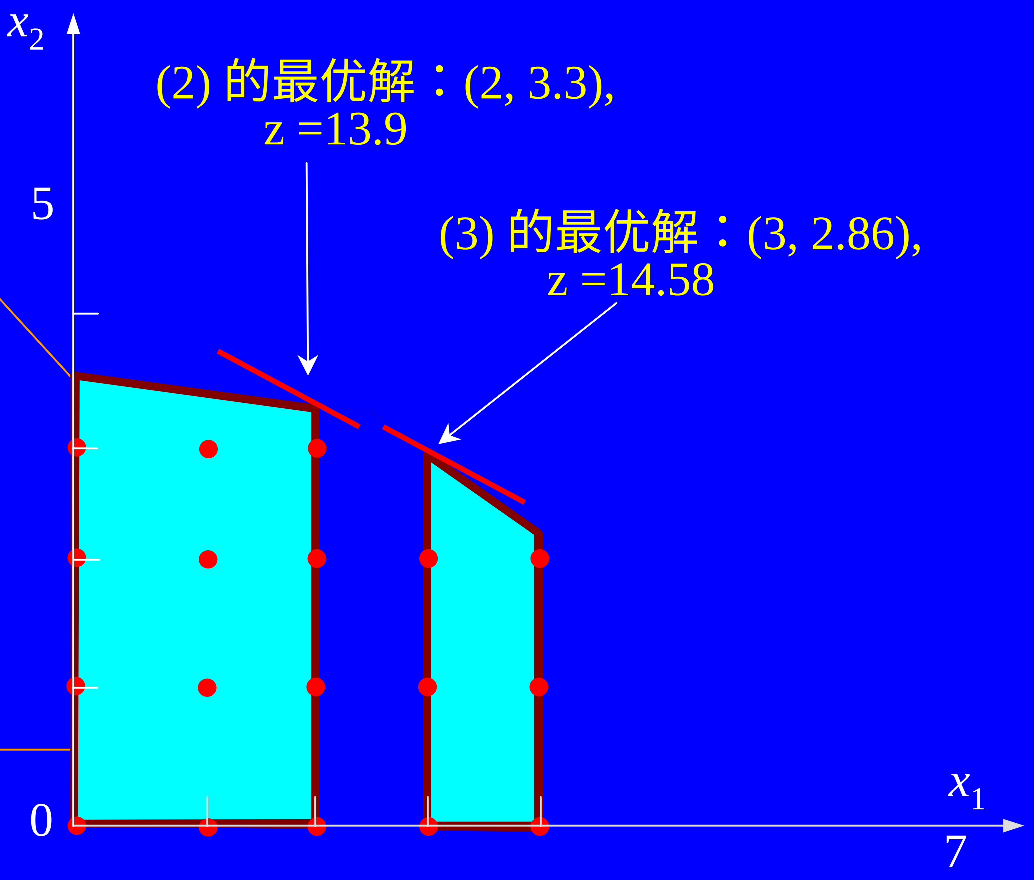
z =13.9

$$\text{Max } 2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} \text{s.t. } 195x_1+273x_2 \le 1365 & \\ 4x_1+40x_2 \le 140 & (3) \\ x_1 \le 4 & \\ x_1 \ge 3 & \\ x_1,\ x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

(3) 的最优解：(3，2.86),

z =14.58



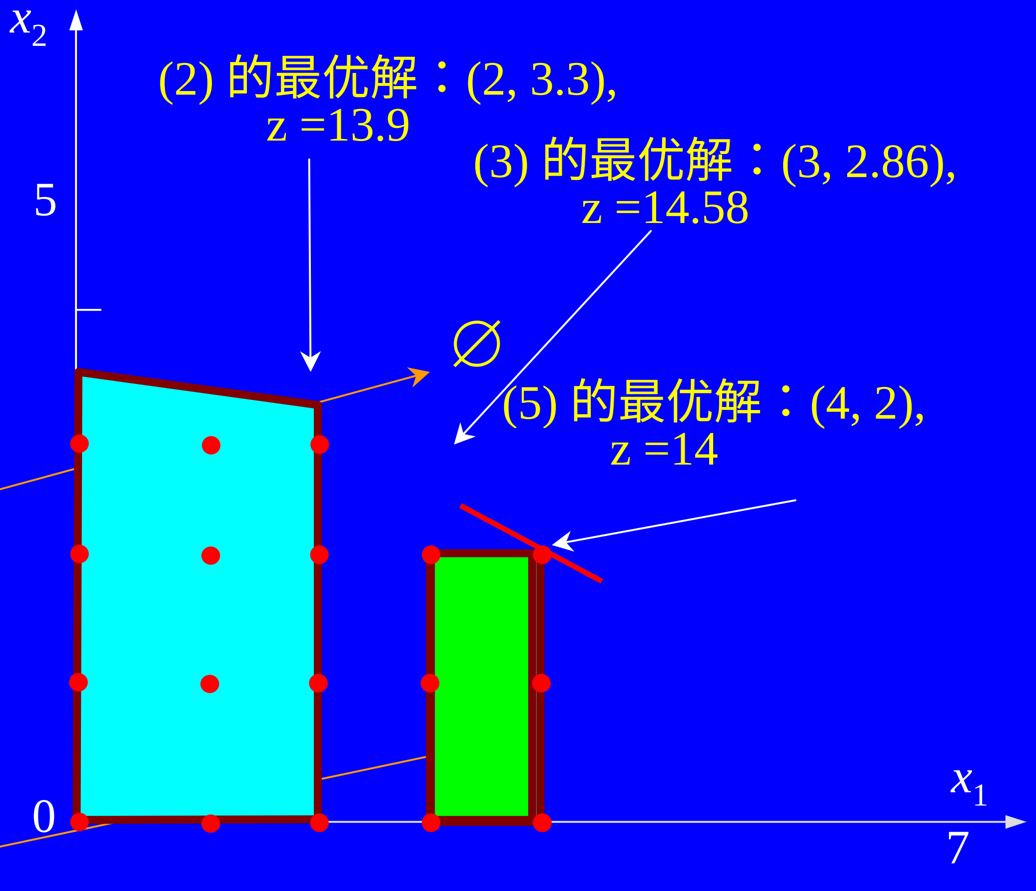
Z_L =13, Z_U = max(13.9, 14.58) = 14.58

先取目标函数值大的线性规划分解.

$$
\begin{cases}
\text{Max } 2x_1+3x_2 \\
\text{s.t. } 195x_1+273x_2 \le 1365 \\
4x_1 + 40x_2 \le 140 \qquad (3) \\
x_1 \le 4 \\
x_1 \ge 3 \\
x_1,\ x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\text{Max } 2x_1+3x_2 \\
\text{s.t. } 195x_1+273x_2 \le 1365 \\
4x_1 + 40x_2 \le 140 \qquad (4) \\
x_1 \le 4 \\
x_1 \ge 3 \\
x_2 \le 2 \\
x_1,\ x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\text{Max } 2x_1+3x_2 \\
\text{s.t. } 195x_1+273x_2 \le 1365 \\
4x_1 + 40x_2 \le 140 \qquad (5) \\
x_1 \le 4 \\
x_1 \ge 3 \\
x_2 \ge 3 \\
x_1,\ x_2 \ge 0
\end{cases}
$$



(2) 的最优解：(2, 3.3),
z =13.9

(3) 的最优解：(3, 2.86),
z =14.58

(5) 的最优解：(4, 2),
z =14

Z_L =14, Z_U = max(13.9, 14) = 14

五 案例分析

选择若干案例进行分析和讨论.

第六章 动态规划

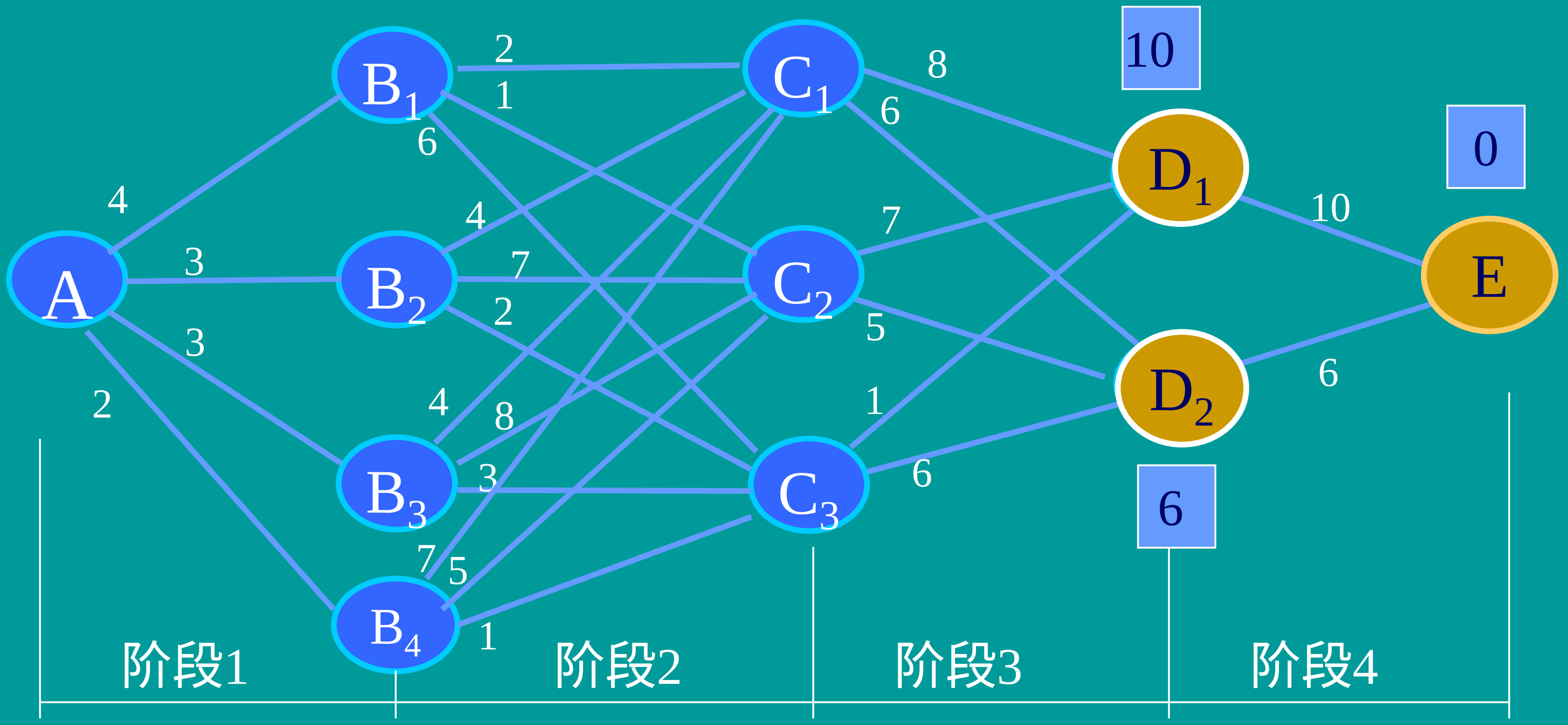
马 占 新

The School of Economic & Management
Of Inner Mongolia University

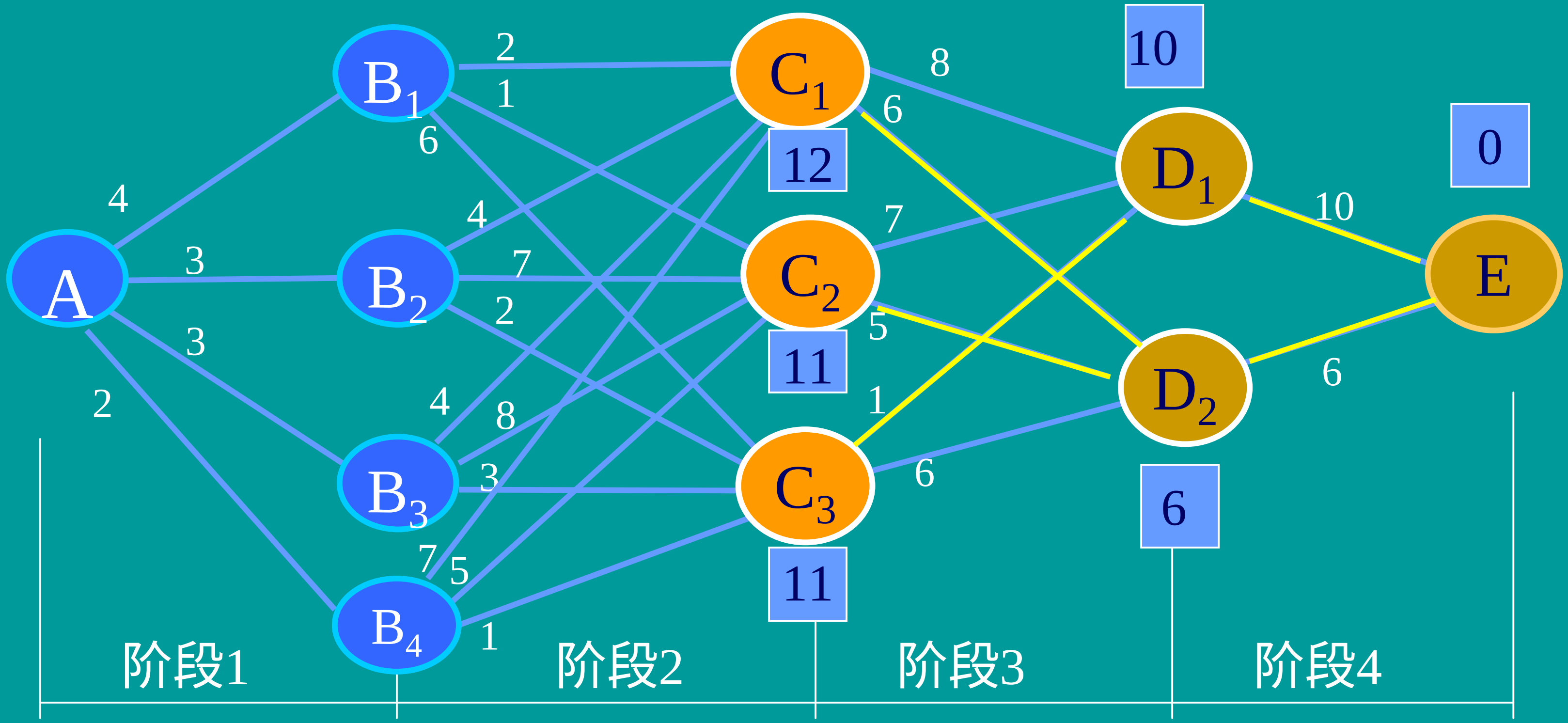
内蒙古大学经济管理学院

一 多阶段决策过程最优化问题举例

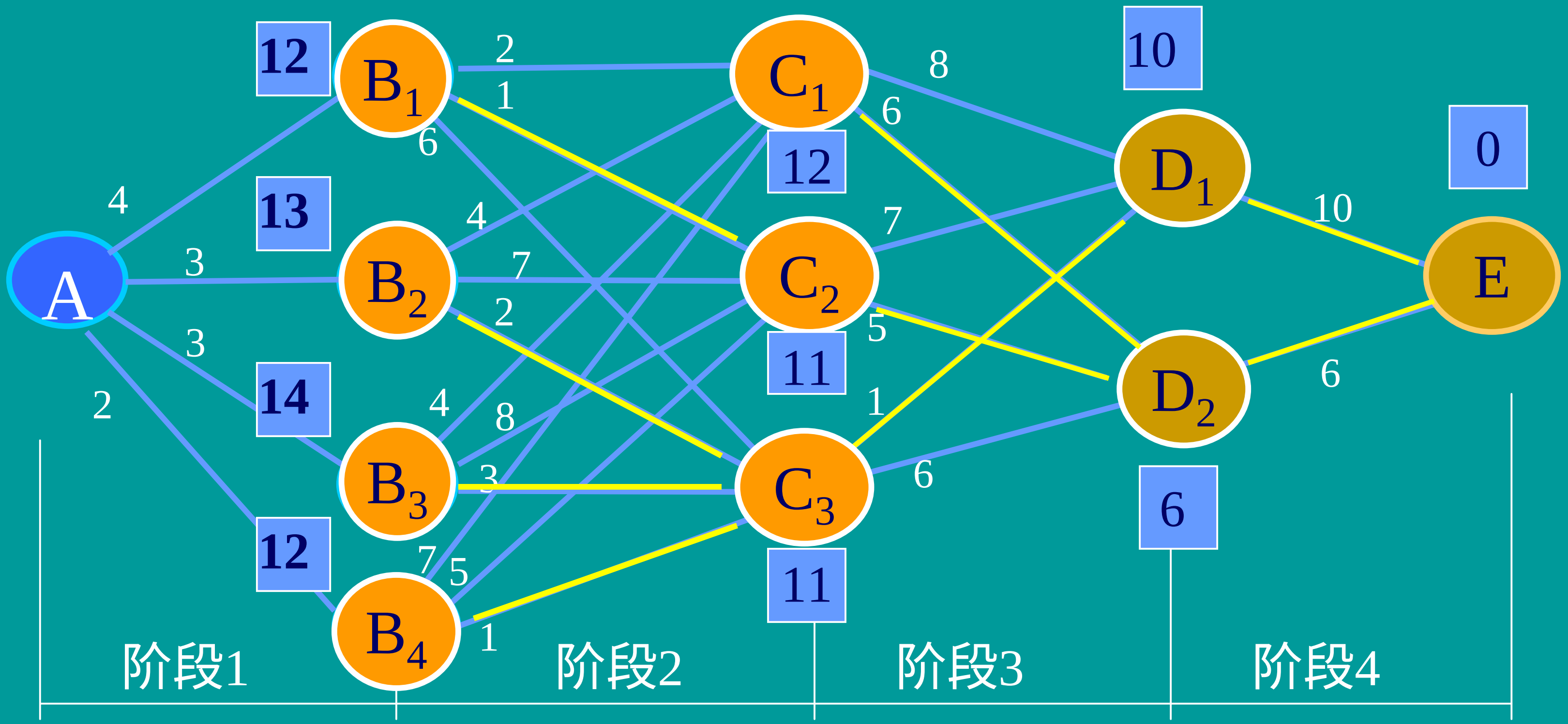
例1 求运输网络中A到E的最短距离。



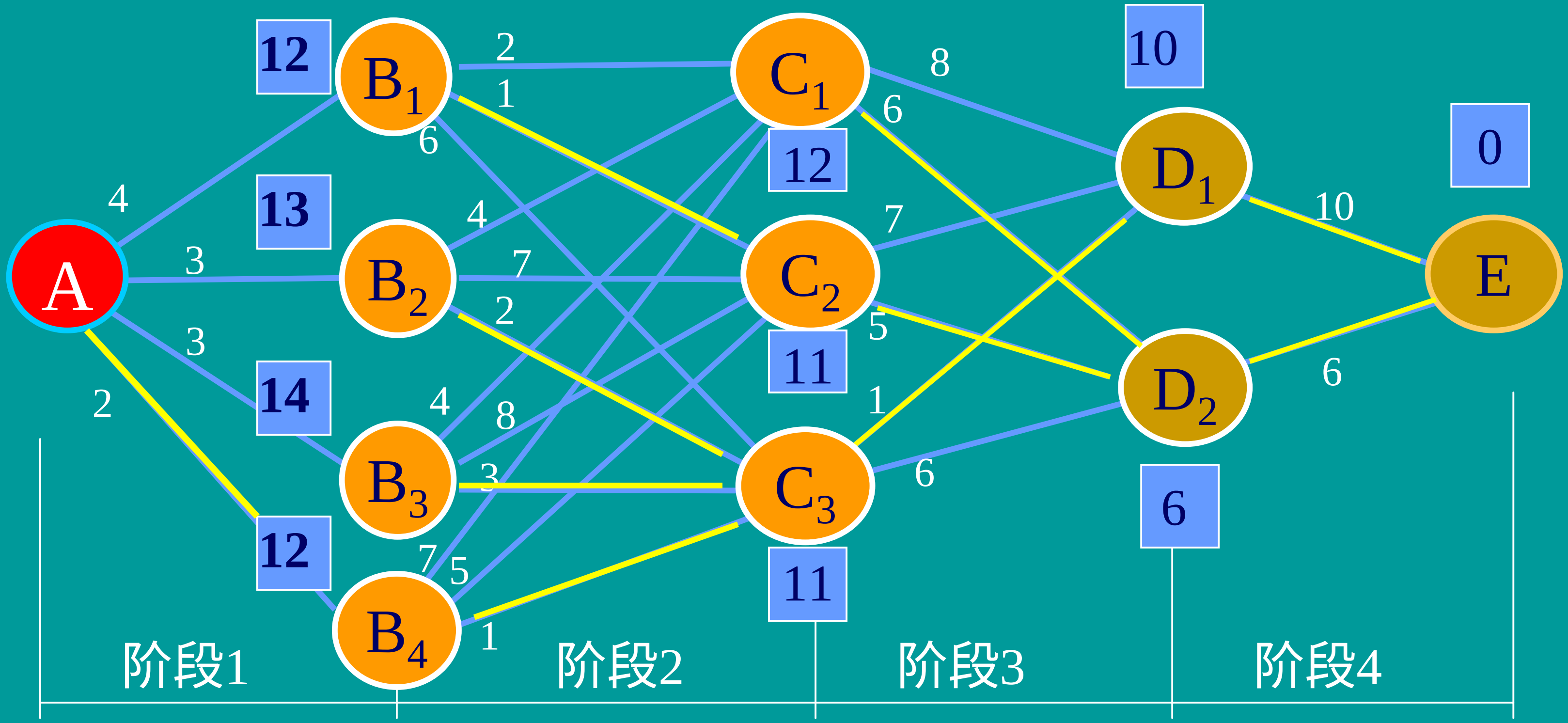
阶段 4			
本阶段始点（状态）	本阶段始点（决策） E	到 E 的最短距离	本阶段最优终点
D_1	10	10	E
D_2	6	6	E



阶段 3				
本阶段始点（状态）	本阶段始点（决策）		到 E 的最短距离	本阶段最优终点
	D_1	D_2		
C_1	8+10	6+6	12	D_2
C_2	7+10	5+6	11	D_2
C_3	1+10	6+6	11	D_1



阶段 2					
本阶段始点（状态）	本阶段始点（决策）			到 E 的最短距离	本阶段最优终点
	C_1	C_2	C_3		
B_1	2+12	1+11	6+11	12	C_2
B_2	4+12	7+11	2+11	13	C_3
B_2	4+12	8+11	3+11	14	C_3
B_3	7+12	5+11	1+11	12	C_3

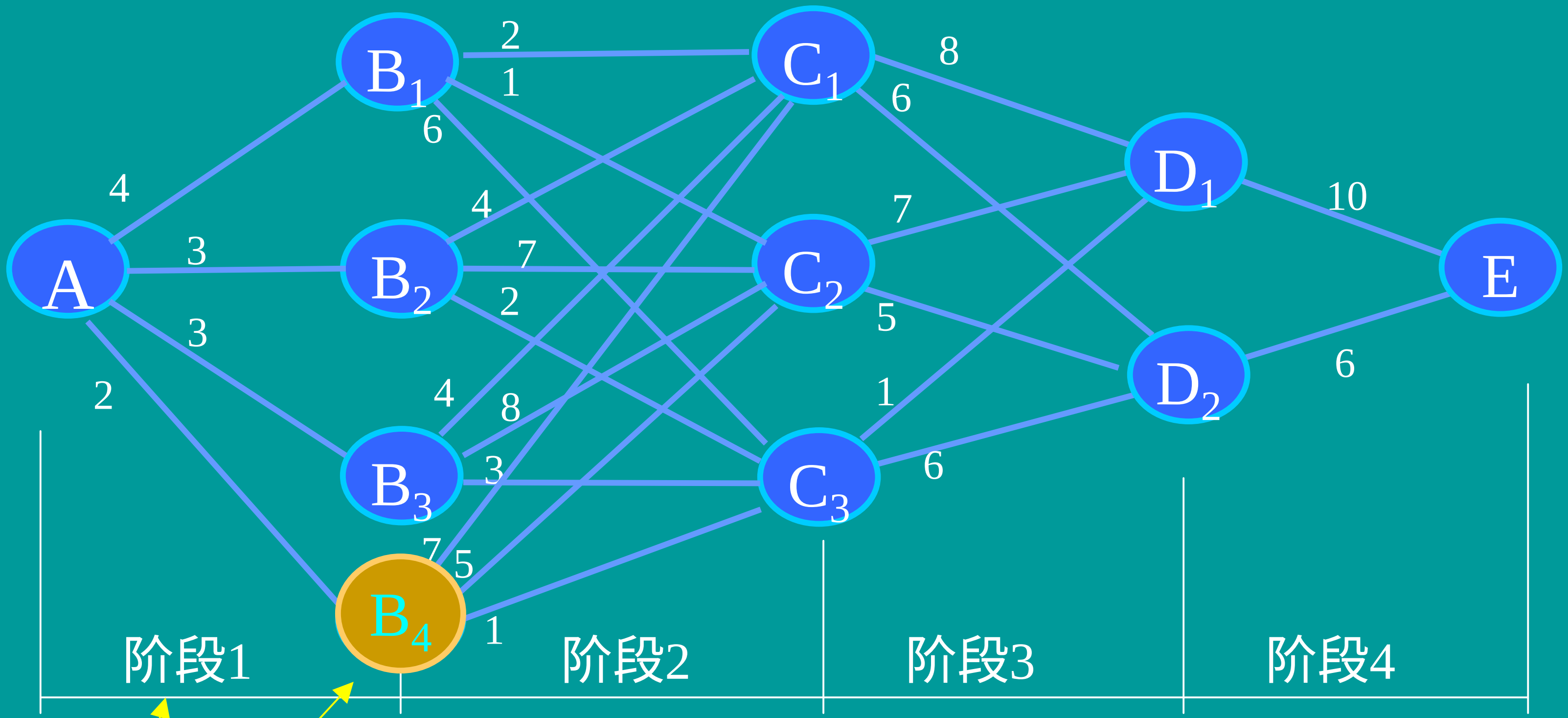


阶段 1						
本阶段始点（状态）	本阶段始点（决策）				到 E 的最短距离	本阶段最优终点
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A	4+12	3+13	3+14	2+12	14	B_4

最短路：A--B_4--C_3--D_1--E，　　最短距离：14

通过从最后一个阶段开始，从终点向始点方向逐段逆推的寻优方法，称为动态规划的逆序解法。

二　基本概念、基本方程与最优化原理

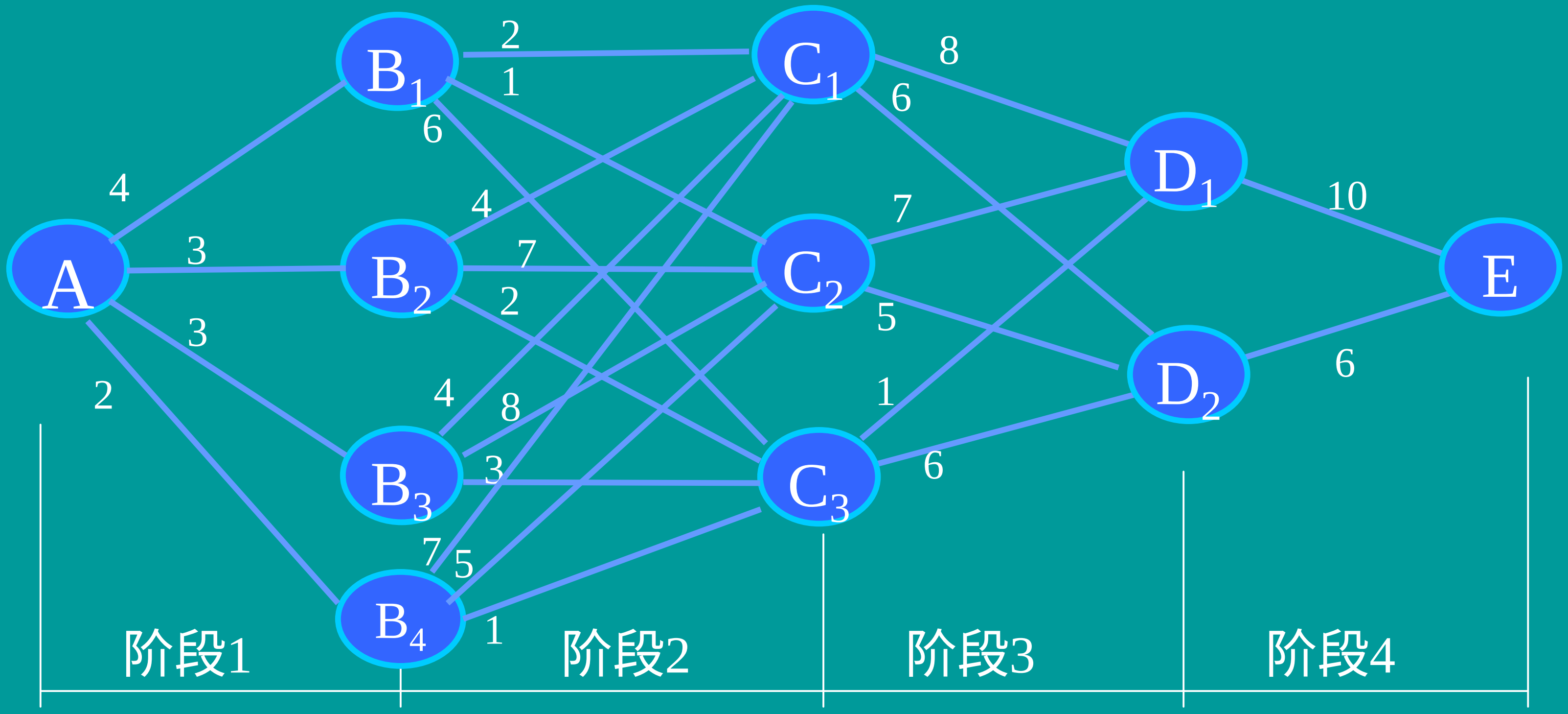


一、 动态规划基本概念：

1 阶段：一般按照时间或空间的自然特征去划分。

2 状态：状态指每个阶段开始时所处的自然状况或客观条件。用s_n表示，例如 s_2 可以取B_1，B_2，B_3或B_4

3 决策：是指某一阶段内的抉择，用$x_n(s_n)$表示。例如$x_2(B_1)=C_2$表示第2阶段处于B_1为始点的状态下选择了C_2为第2 阶段终点。



4 策略：记为$p_{1,n}(s_1)$由所有各阶段决策组成的决策函数序列称为全过程策略, 简称策略.

5 能够达到最优的策略称为最优程策略.

6 从第k个阶段开始到最后阶段的决策组成的策略称为k子过程策略，简称k子策略。记为$p_{k,n}(s_k)$.

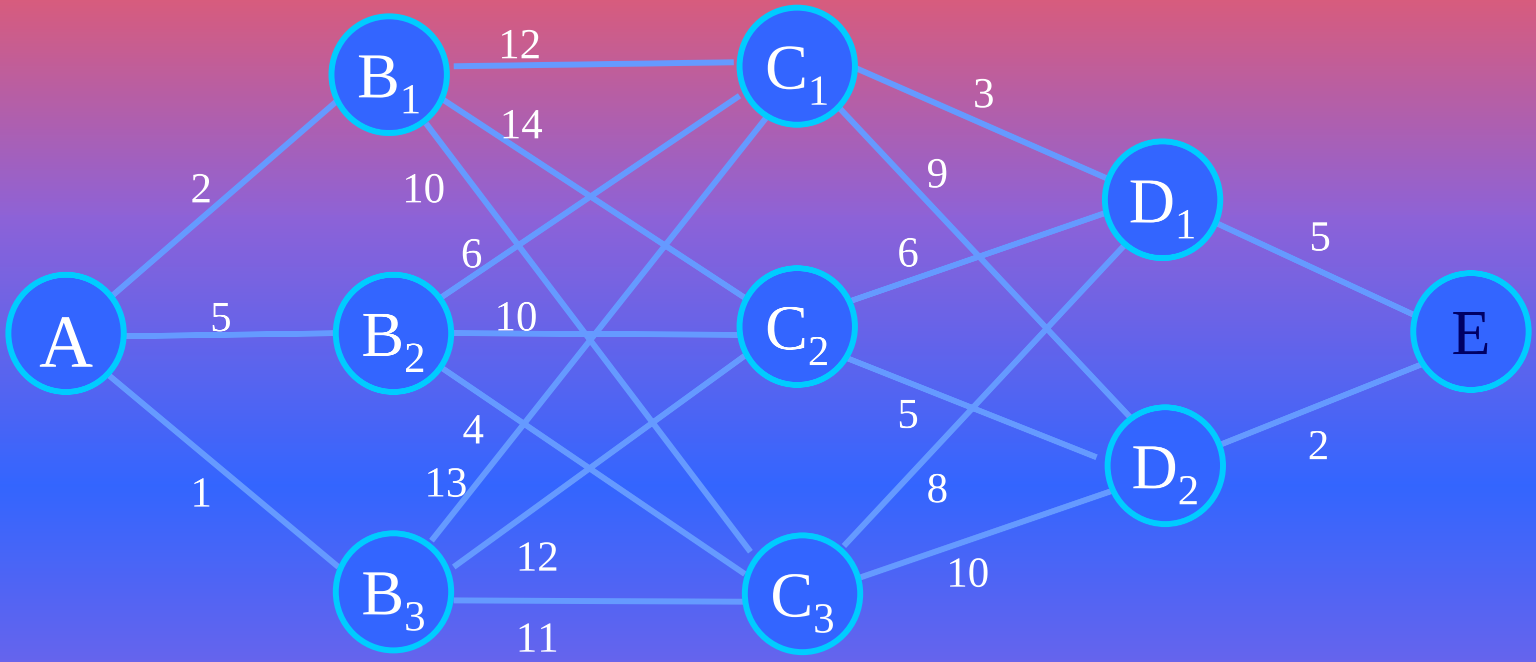
7 指标函数：是衡量全过程策略或K子过程策略优劣的数量指标。指标函数的最优值称为最优指标函数。记为$f_1(s_1)$或 $f_k(s_k)$，例如：$f_1(s_1)= f_1(A) =14$， $f_2(B_2)=13$。

第j阶段指标记为：$r_j(s_j, x_j)$。比如 $r_2(B_3, C_2) = 8$表示B_3到C_2的距离为8 。

8 状态转移方程： $s_{n+1} = T_n(s_n, x_n)$

二 基本方程：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\{\ r_k(s_k,\ x_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}, \quad k = n, n\text{-}1,\ \ldots 2, 1 \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$



例如： $f_2(B_1) = \min\{\ r_2(B_1,\ x_2) + f_3(x_3)\}$

$= \min\{\ r_2(B_1,\ C_1) + f_3(C_1),\ r_2(B_1,\ C_2) + f_3(C_2), r_2(B_1,\ C_3) + f_3(C_3)\}$

$= \min\{2+12, 1+11, 6+11\}=12$

当求指标函数值最大时把min 改成 max即可.

动态规划应用

一 资源分配问题:

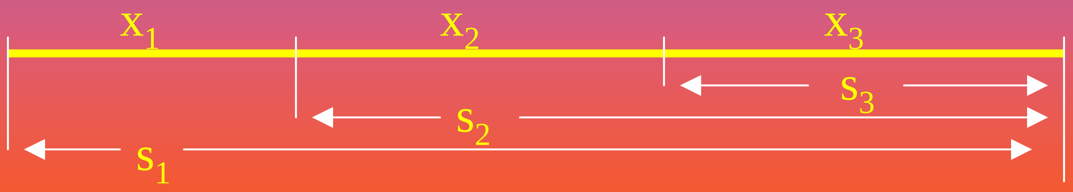
例2　一家公司拟将5台设备分配给所属的3个工厂，预计5台设备的可能创造的利润如图所示，问如何分配设备,可创利最大?

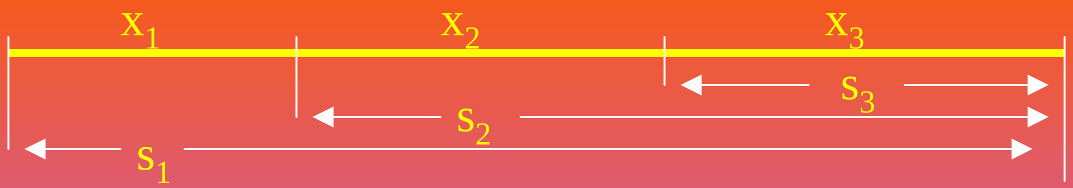
设备可能创利情况

设备台数 \ 工厂	1	2	3
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

解:　设s_k = 分配给第k个厂到第3个厂的所有设备台数。

x_k = 分配给第k个厂的设备台数。



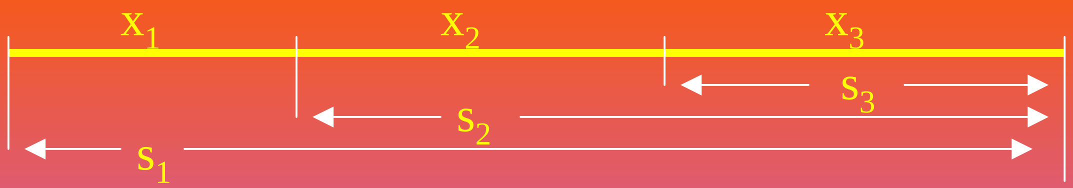


第 3 阶段

x_3 / s_3	$r_3(s_3, x_3)$						$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	-	4	-	-	-	-	4	1
2	-	-	6	-	-	-	6	2
3	-	-	-	11	-	-	11	3
4	-	-	-	-	12	-	12	4
5	-	-	-	-	-	12	12	5

第 2 阶段

x_2 / s_2	$r_2(s_2, x_2)$						$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+4	5+0	-	-	-	-	5	1
2	0+6	5+4	10+0	-	-	-	10	2
3	0+11	5+6	10+4	11+0	-	-	14	2
4	0+12	5+11	10+6	11+4	11+0	-	16	1，2
5	0+12	5+12	10+11	11+6	11+4	11+0	21	2



第 2 阶段

s_2 \ x_2	$r_2(s_2, x_2)$						$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+4	5+0	-	-	-	-	5	1
2	0+6	5+4	10+0	-	-	-	10	2
3	0+11	5+6	10+4	11+0	-	-	14	2
4	0+12	5+11	10+6	11+4	11+0	-	16	1，2
5	0+12	5+12	10+11	11+6	11+4	11+0	21	2

第 1 阶段

s_1 \ x_1	$r_1(s_1, x_1)$						$f_1(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	0+21	3+16	7+14	9+10	12+5	13+0	21	0，2

可知最优值为21，

因为：$s_1 = 5$， $x_1^*=0，2$ ⟶ $s_2 = s_1 - x_1^* =5，3$ ⟶ $x_2^* =2$

⟶ $x_3^* = s_3 = s_2 - x_2^* = 3，1$

工厂：	**1**	**2**	**3**
设备：	0	2	3
	2	2	1

第八章 图与网络模型

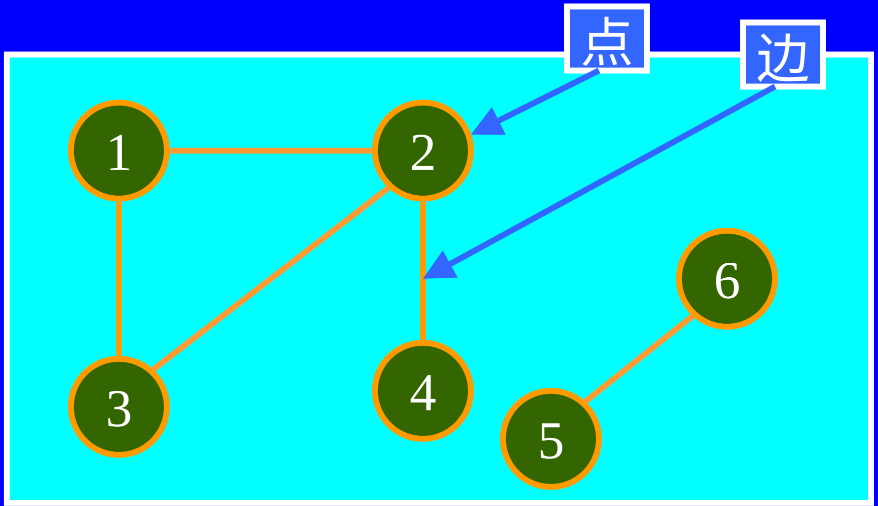
马　占　新

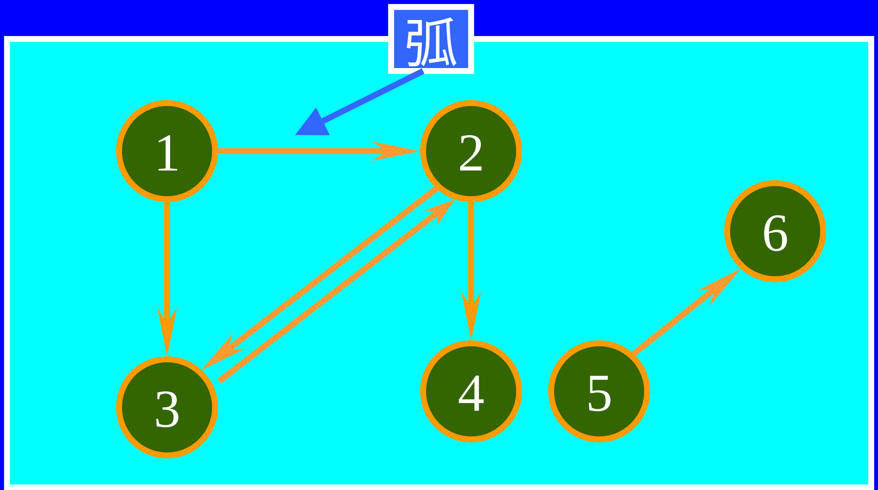
The School of Economic & Management
Of Inner Mongolia University

内蒙古大学经济管理学院

一　图与网络的基本概念

■网络由节点和边组成，它可以反映一些对象之间的关系。





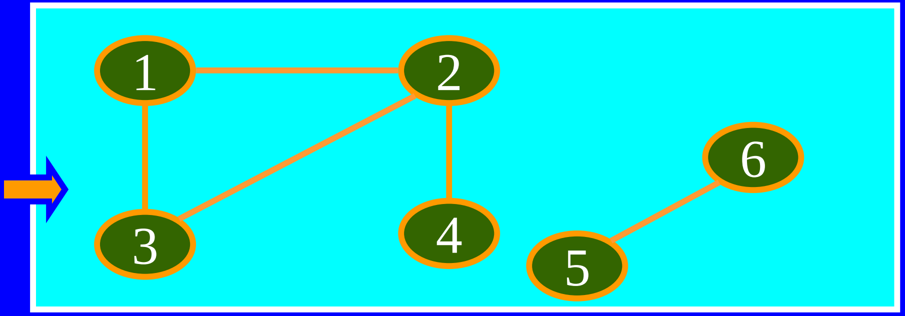
■用于刻画关系简单明了。

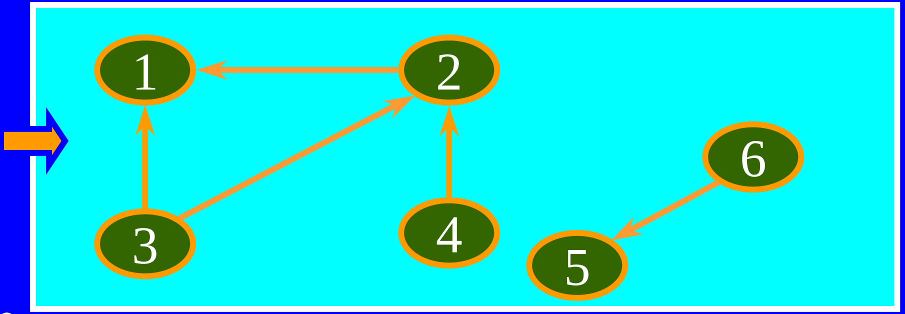
■重要的是应用它可以刻画对象之间的内在规律。

■图中点的相对位置和线的长短对反映对象之间的关系并不重要。

■基本概念

- **无向图**：由点和边构成的图（简称图）。记为G=（V，E），其中V是G的点集合，E是G的边集合。
- **有向图**：由点和弧构成的图。记为D=（V，A），其中V是D的点集合，A是D的弧集合。
- 无向图实际上是一种特殊的有向图。





■链--- 圈 ---连通图

■路---回路

■赋权图：无向和有向赋权图。

■网络：在赋权的有向图中指定了发点、收点和中间点，并规定了容量的图。

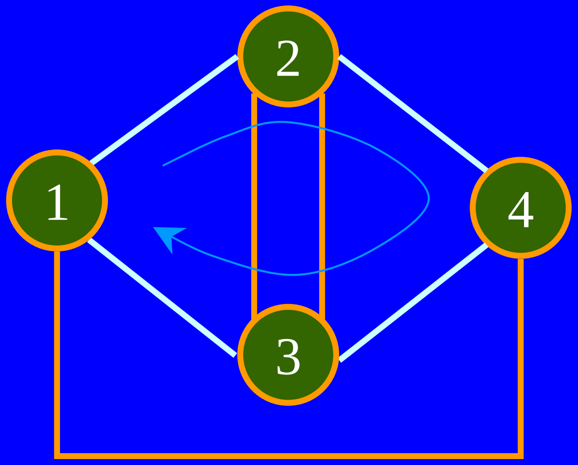
■链（Chain）

前后相继并且方向不一定相同的边序列称为链　C={(1,2),(2,4)}

■圈(Cycle)

起点和终点重合的链称为圈

ρ ={(1,2),(2,4),(3,4),(1,3)}



■连通图

任意两个节点之间至少有一条链的图称为连通图

■路： μ ={(1,2),(2,4)

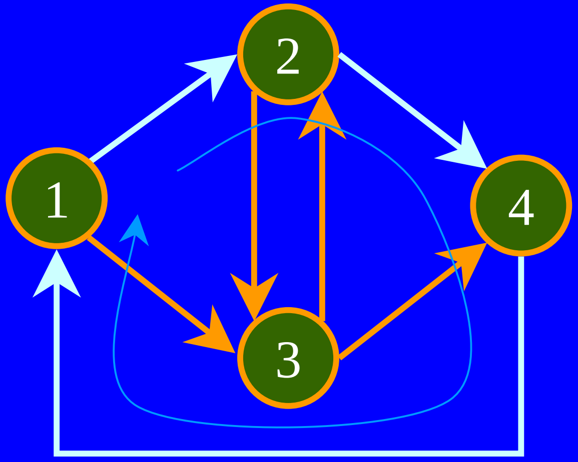
路中各条边方向相同

■回路（Circuit）

起点和终点重合的路径称为回路

μ ={(1,2),(2,4),(4,1)}

回路中各条边方向相同



二　最短路问题

- ▷ 算法与实例
- ▷ 最短路问题的应用

一　算法与实例

最短路问题是要在有向图的两点间中找到一条路，使得这条路上所有弧的权数之和最小。这个和被叫做距离。

例如各种管道的铺设、设备的更新以及输送网络最小费用等。

一　求解最短路的**Diskstra算法(双标号法)**：

- 适用于$C_{ij} > 0$的情况，　对点v_j标号为$(l_j, k_j) =$ (起点到v_j的距离, 最短路前一邻点下标)

(1)　给起点以标号(0,s)

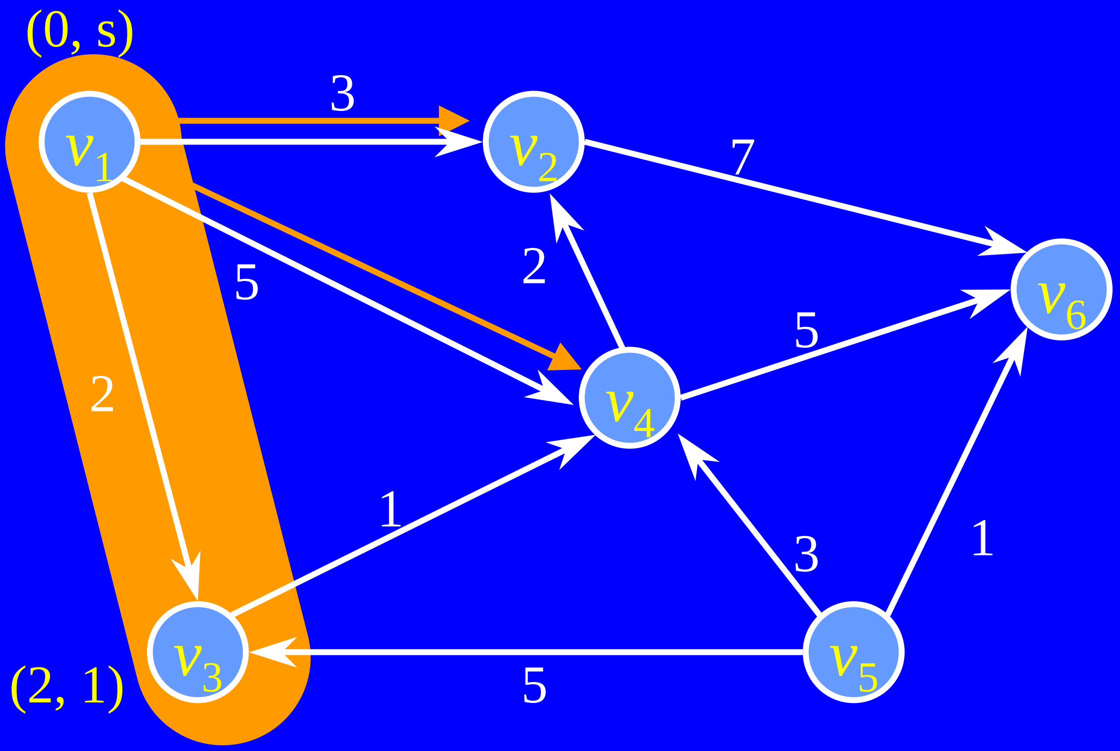
(2)　I ={已标号点的集合}, J = {未标号点的集合},

$$L= \{(v_i, v_j) \mid v_i \in I, v_j \in J\}$$

(3) 若L =∅, 则停止. 否则, 对所有的 L中的弧计算$s_{ij}=l_i+c_{ij}$，并找到最小值对应的弧(不妨设为(v_c, v_d))，把相应的弧标为(s_{cd}, c)。转到第2步.

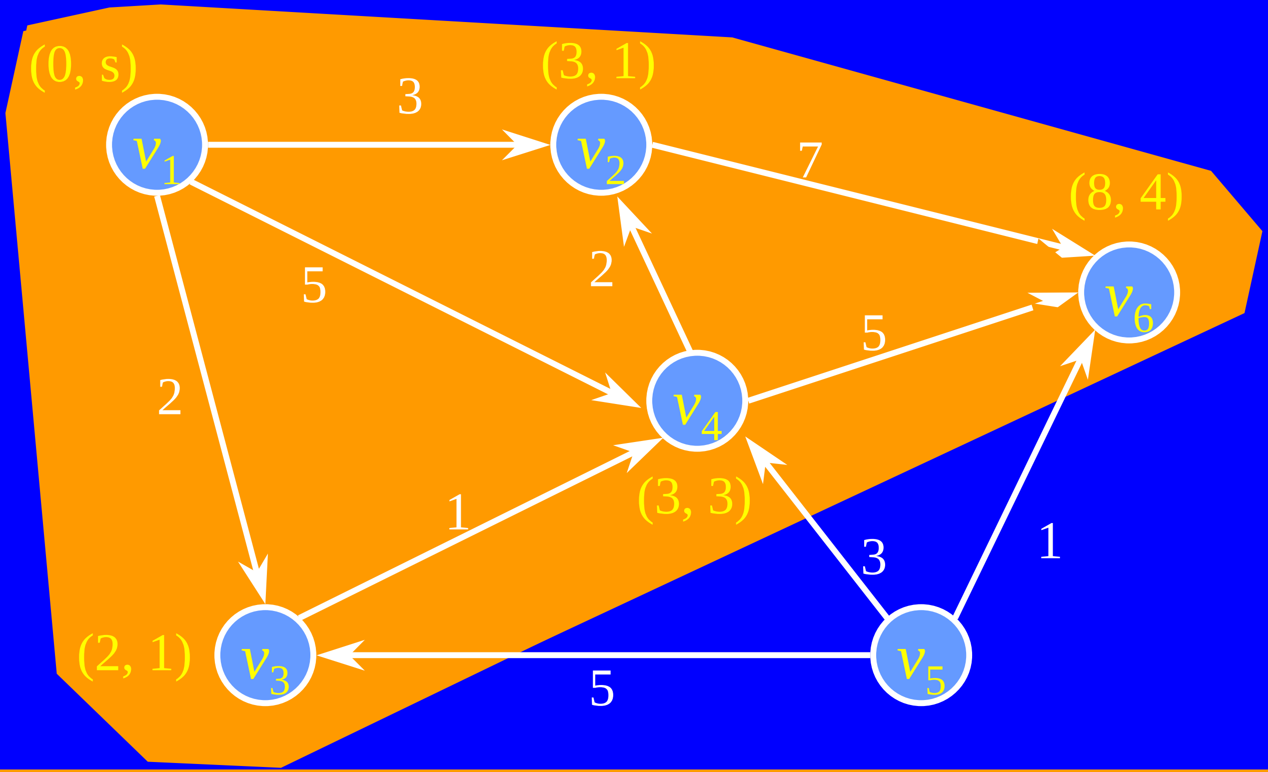
例1 求从v_1到v_6的最短路

1 给v_1以标号(0, s)



2 I ={v_1}，J={v_2， v_3， v_4， v_5， v_6}， L= {(v_1, v_2)，(v_1, v_3)， (v_1, v_4)}，并有 min {s_{12}, s_{14}, s_{13}} = min {0+3, 0+5,0+2} = 2，给v_3以标号(2, 1)。

3　I ={v_1，v_3}，J={v_2，v_4，v_5，v_6}，L= {(v_1, v_2)，(v_1, v_4)，(v_3, v_4)}，并有 min {s_{12}, s_{14}, s_{34}} = min {0+3, 0+5, 2+1} = 3，给v_2，v_4分别标号(3, 3)，(3, 1)。



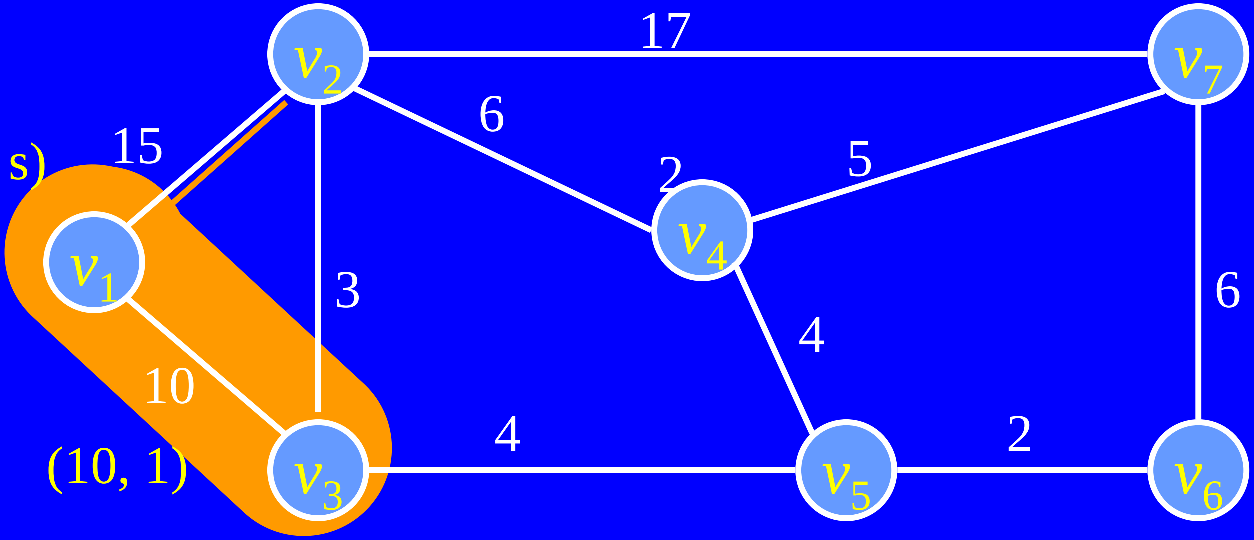
最短路是：$v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$

距离：8

最短路问题的应用

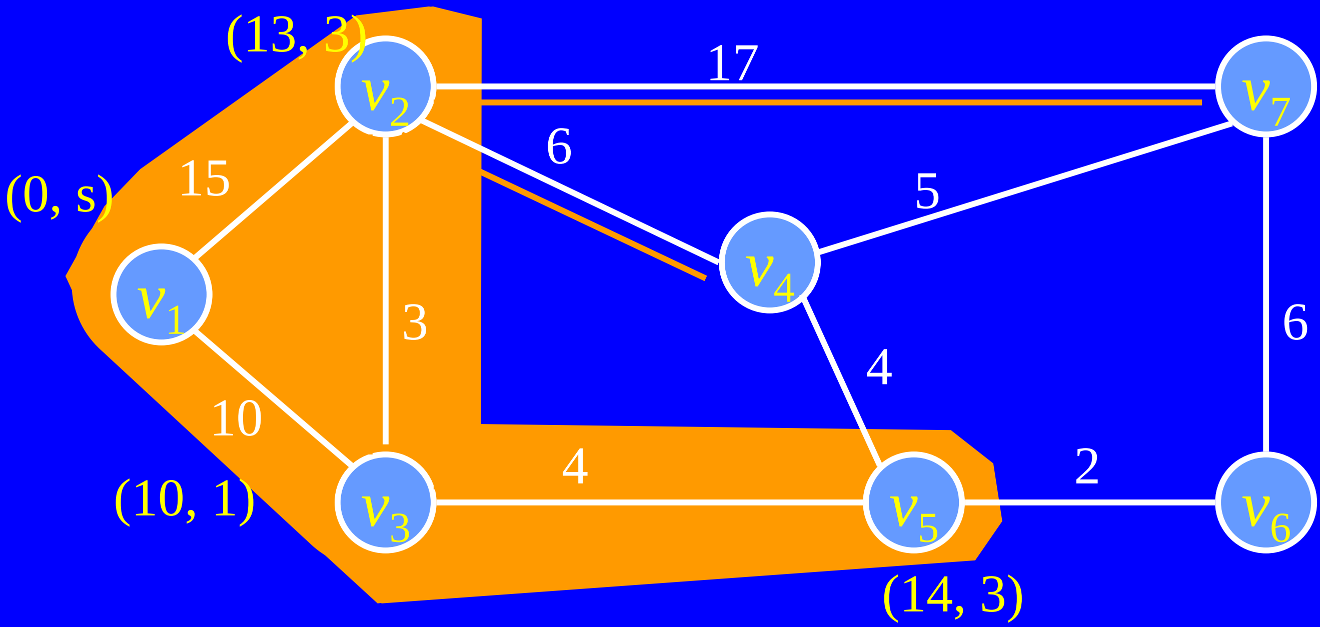
例2 问下列网络中如何架设使用光缆最短。

1 给v_1以标号(0, s)



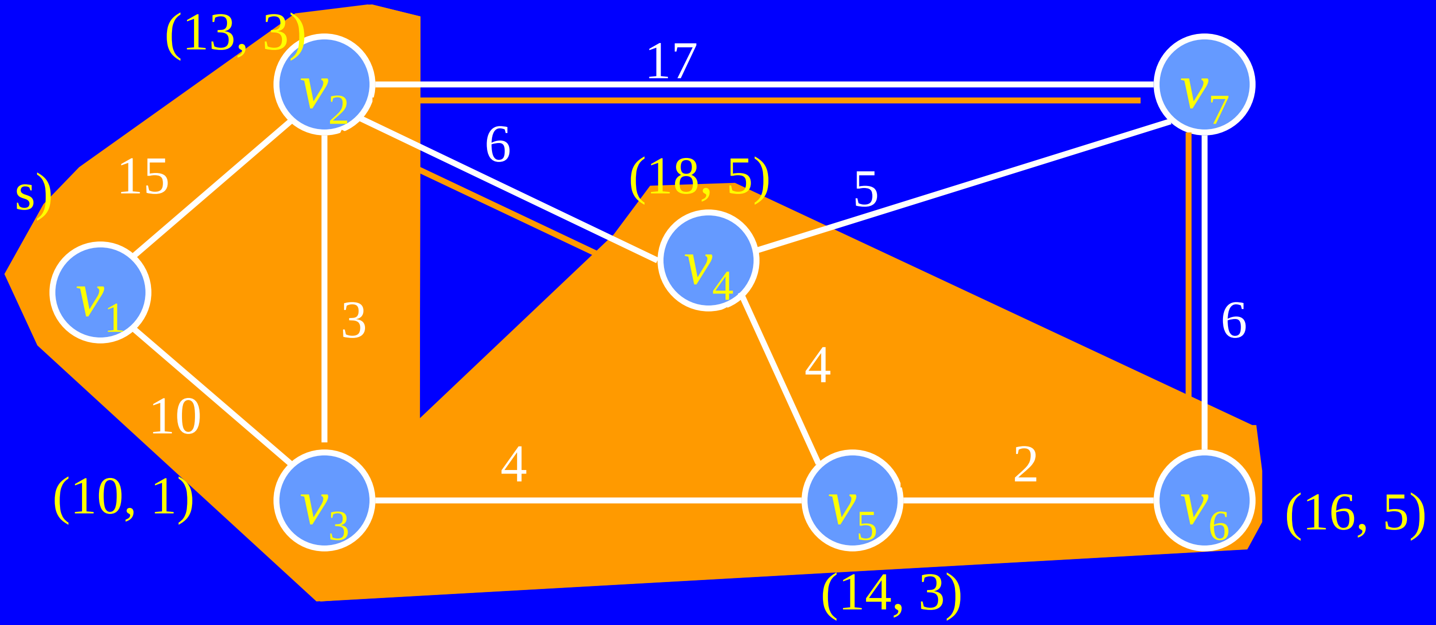
2 I ={v_1}，J={v_2，v_3，v_4，v_5，v_6，v_7}，L= {(v_1, v_2)，(v_1, v_3)}，并有 min {s_{12}, s_{13}} = min {0+15, 0+10} = 10，给v_3以标号(10, 1)。

3 I ={v_1， v_3}，J={v_2， v_4， v_5， v_6， v_7}， L= {(v_1, v_2)，(v_3, v_2)，(v_3, v_5)}， 并有 min {s_{12}, s_{32}, s_{35}} = min {0+15, 10+3，10+4} = 13，给v_2标号为(13, 3)。



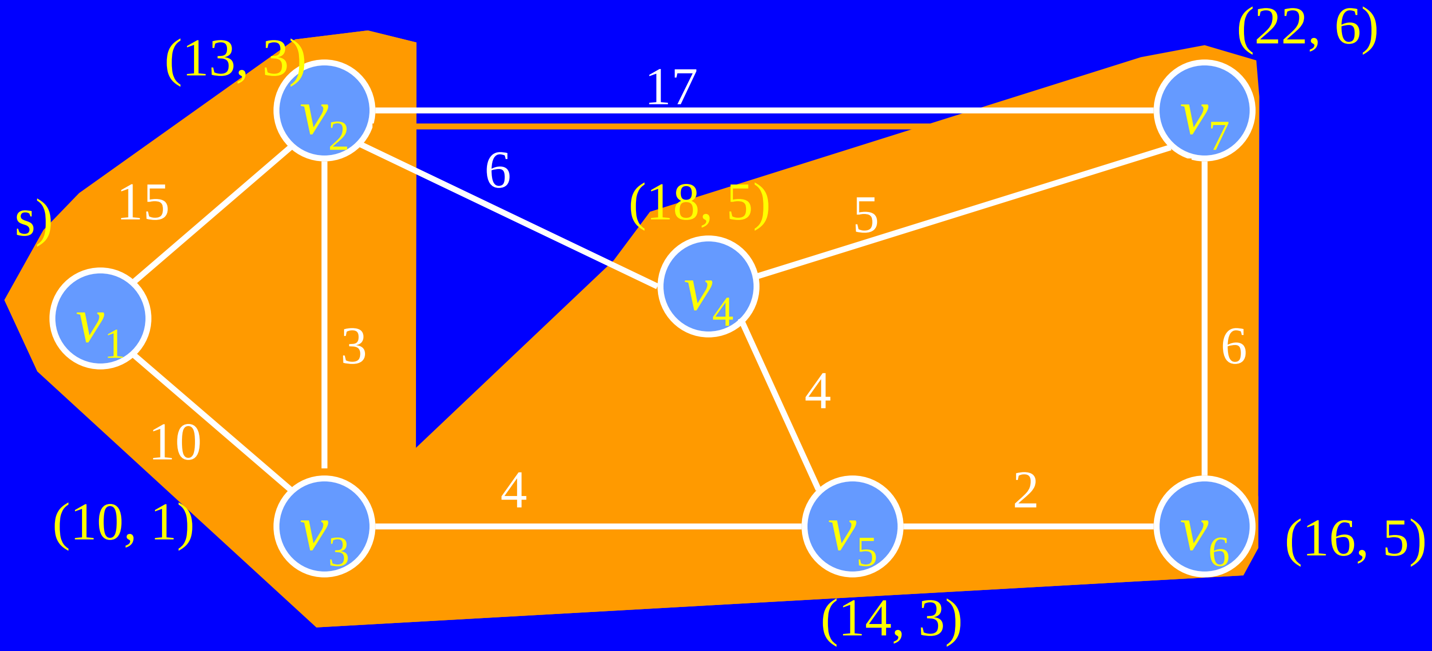
4 I ={v_1， v_2， v_3}，J={v_4， v_5， v_6， v_7}， L= {(v_2, v_7)，(v_2, v_4)，(v_3, v_5)}， 并有 min {s_{27}, s_{24}, s_{35}} = min {13+17, 13+6，10+4} = 14，给v_5标号为(14, 3)。

5 I ={v_1 ， v_2 ， v_3 ， v_5 }，J={v_4 ， v_6 ， v_7}， L= {(v_2, v_7)，(v_2, v_4) ，(v_5, v_4)，(v_5, v_6)}， 并有 min {s_{27}, s_{24}, s_{54} , s_{56}} = min {13+17, 13+6，14+4，14+2} = 16，给v_6标号为(16, 5)。



6 I ={v_1 ， v_2 ， v_3 ， v_5 ， v_6 }，J={v_4 ， v_7}， L= {(v_2, v_7)，(v_2, v_4) ，(v_5, v_4)，(v_6, v_7)}， 并有 min {s_{27}, s_{24}, s_{54} , s_{67}} = min {13+17, 13+6，14+4，16+6} = 18，给v_4标号为(18, 5)。

7　I ={v_1， v_2， v_3， v_4， v_5， v_6}，J={v_7}， L= {(v_2, v_7)，(v_4, v_7)，(v_6, v_7)}， 并有 min {s_{27}, s_{47}, s_{67}} = min {13+17, 18+5，16+6 } = 22，给v_7标号为(22, 6)。



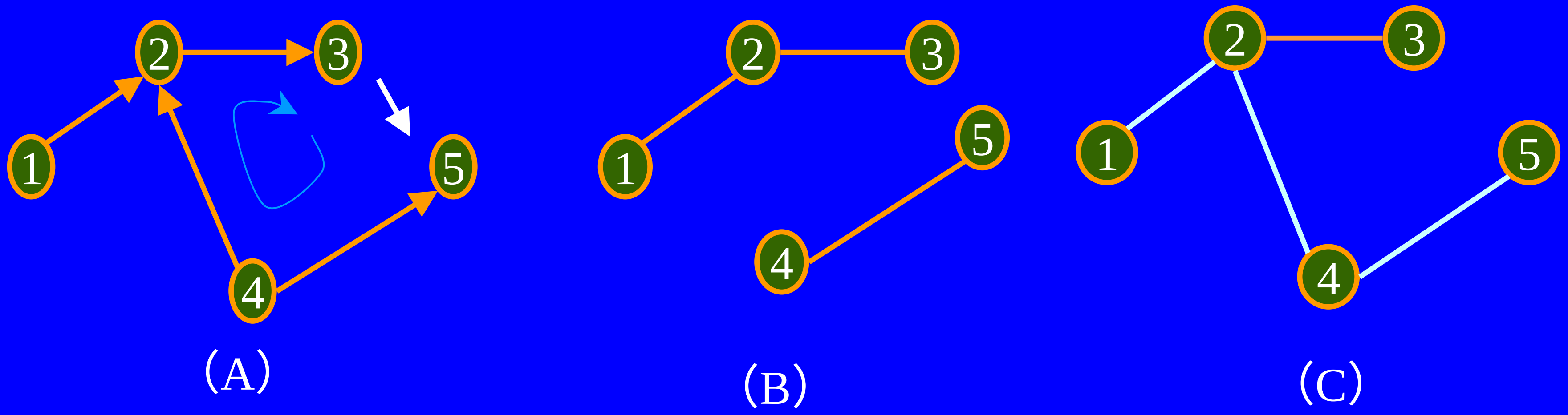
8　I ={v_1， v_2， v_3， v_4， v_5， v_6， v_7}，J = ∅， L= ∅，停止。

最短路是：$v_1 \to v_3 \to v_5 \to v_6 \to v_7$

距离 ： 22

三　最小生成树问题

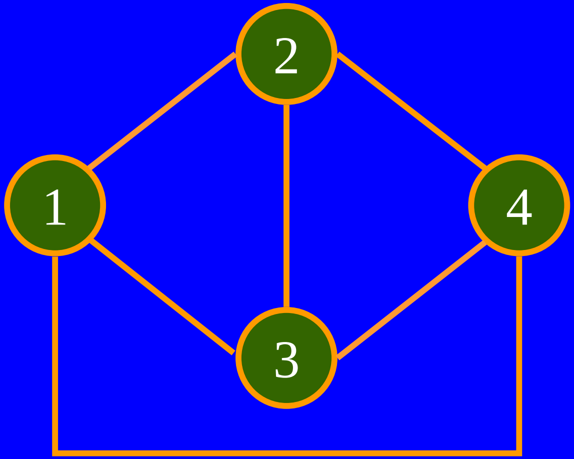
- 树是图论中的一个重要概念。
- 一个无圈的连通图称为树。

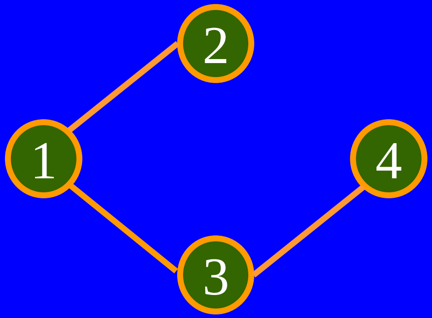


生成子图、生成树：

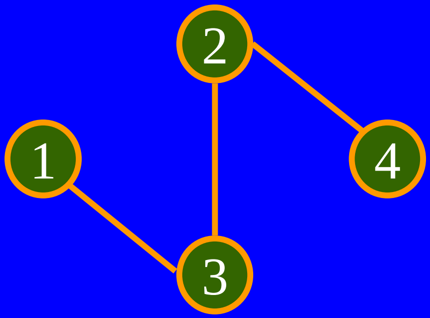
■保留无向图的所有节点和部分边后，所获得的图称为该无向图的生成子图。

■如果该生成子图还是一个树，则称之为生成树

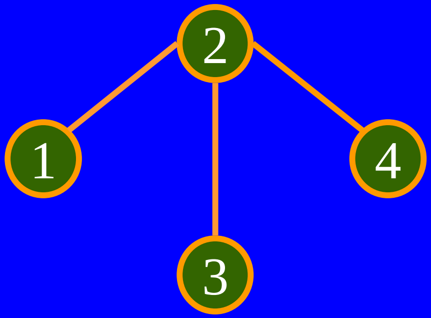




生成树1



生成树2



生成树3

最小生成树：各边的权数之和最小的生成树。

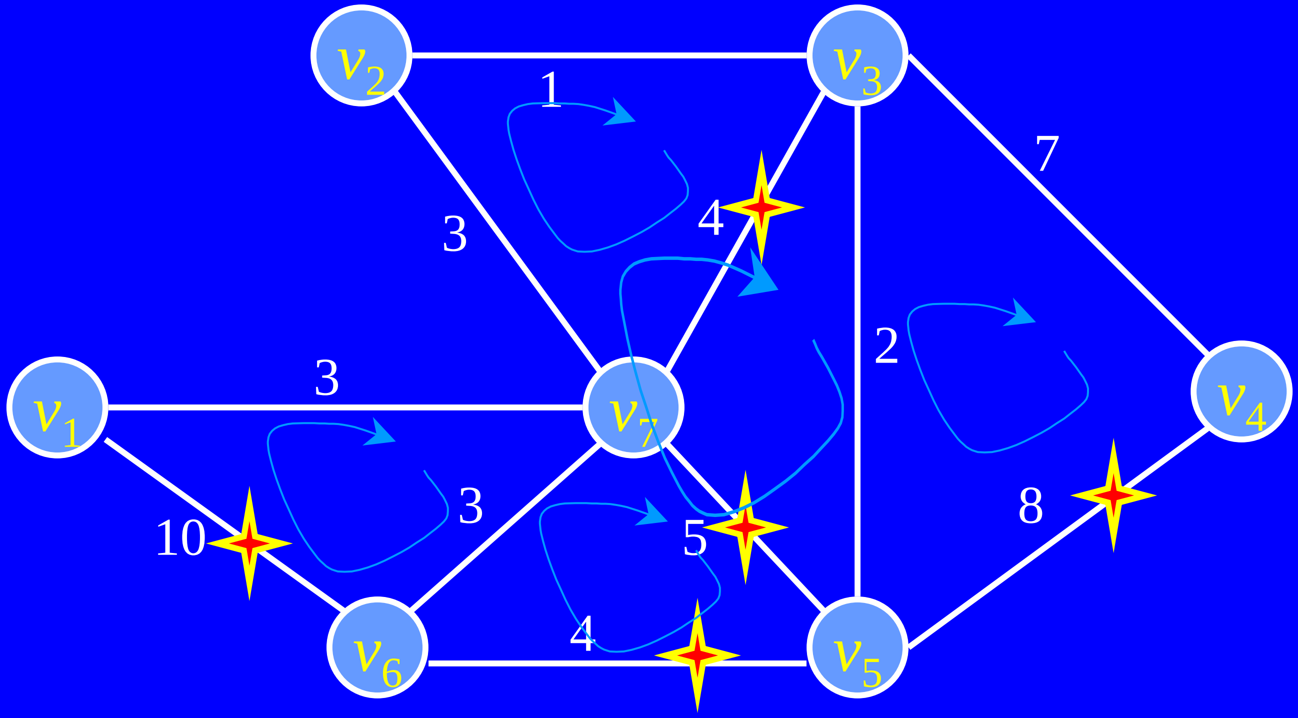
一　求解最小生成树的破圈法：

(1) 找到一个圈。

(2) 在所找到的圈中去掉一个权数最大的边

(3) 若余下的图中不含有圈, 则停止. 转到第1步.

例5： 设某学校要沿下图所示的路线架设计算机电缆，将七个办公室连成网。求使电缆总长最小的架设方案。



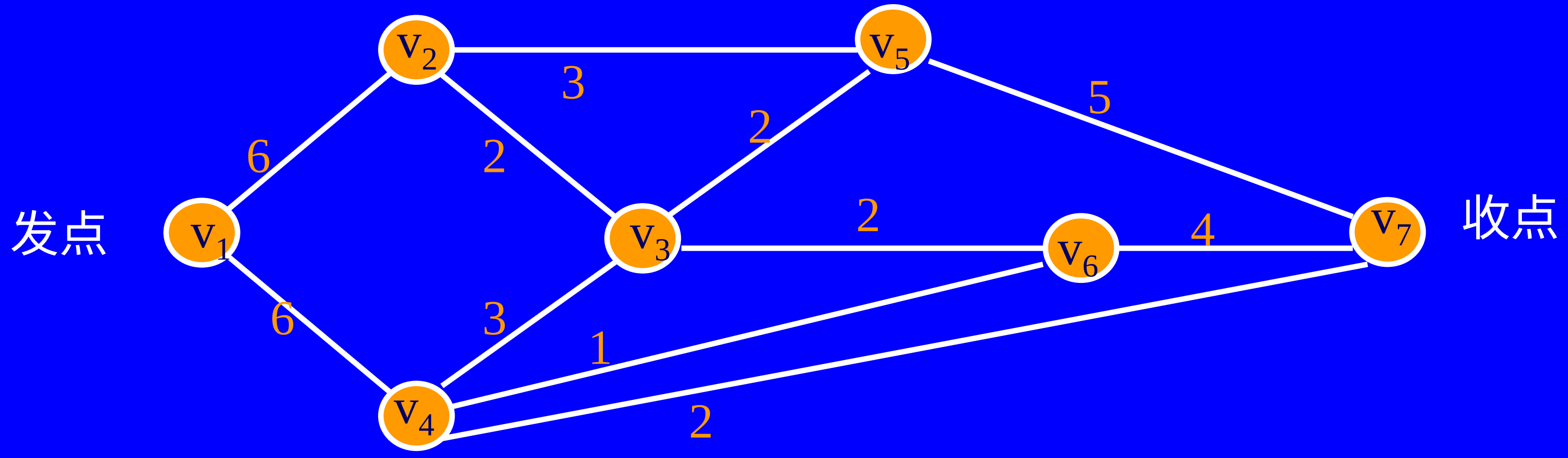
答案：电缆总长的最小值是19=3+3+3+1+2+7

网络最大流问题

许多系统包含了流量问题，例如公路系统有车辆流，控制系统中有控制流、供水系统中有水流，金融系统中有现金流。对于这样包含了流量问题的系统，往往要求出最大流量。**最大流量问题是在不超过每条弧的容量的情况下，求出网络从发点到收点的最大流量。**

一　最大流的数学模型

例6： 通过以下网络运输石油，问每小时最多能运输石油的量。



解： 设f_{ij}表示从(v_i, v_j)上的流量，网络总流量为F。则有：

$$\max \ f_{12} + f_{14}$$

$$\text{s.t.} \quad f_{12} = f_{23} + f_{25}$$

$$f_{14} = f_{43} + f_{46} + f_{47}$$

$$f_{23} + f_{43} = f_{35} + f_{36}$$

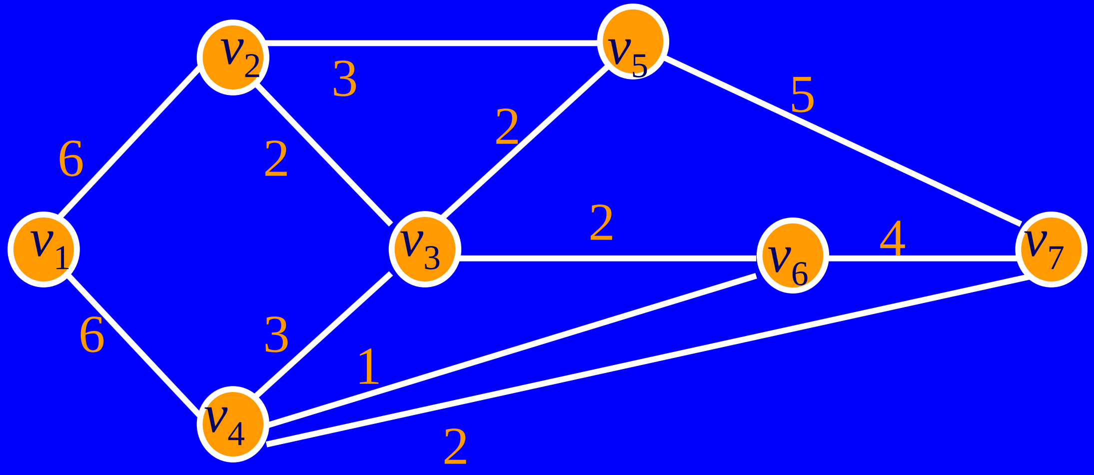
$$f_{25} + f_{35} = f_{57}$$

$$f_{36} + f_{46} = f_{67}$$

$$f_{57} + f_{67} + f_{47} = f_{12} + f_{14}$$

$$f_{ij} \leq c_{ij}, i = 1,2, \ldots ,6 , \ j = 1,2, \ldots, 7$$

$$f_{ij} \geq 0, i = 1,2, \ldots ,6 , \ j = 1,2, \ldots, 7$$



(1) 约束条件 反映的是守恒条件和流量的可行性条件。

(2) 满足约束条件的一组网络流称为可行流。

(3) 可行流中最大的称为最大流。

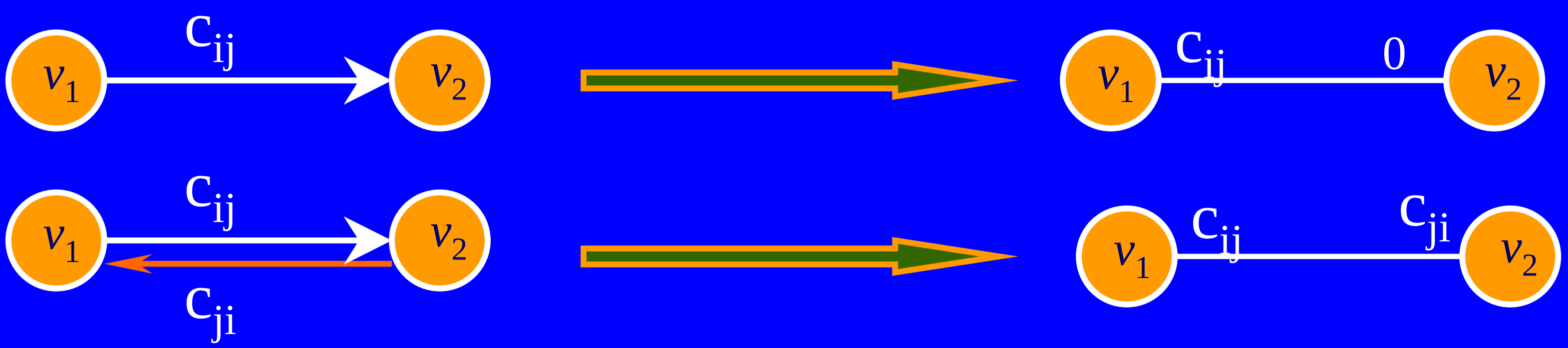
可行流：

1、每一个节点流量平衡

2、$0 \leq f_{ij} \leq u_{ij}$

最大流问题的网络图论解法

1、首先对网络上弧的容量表示作一些改进：



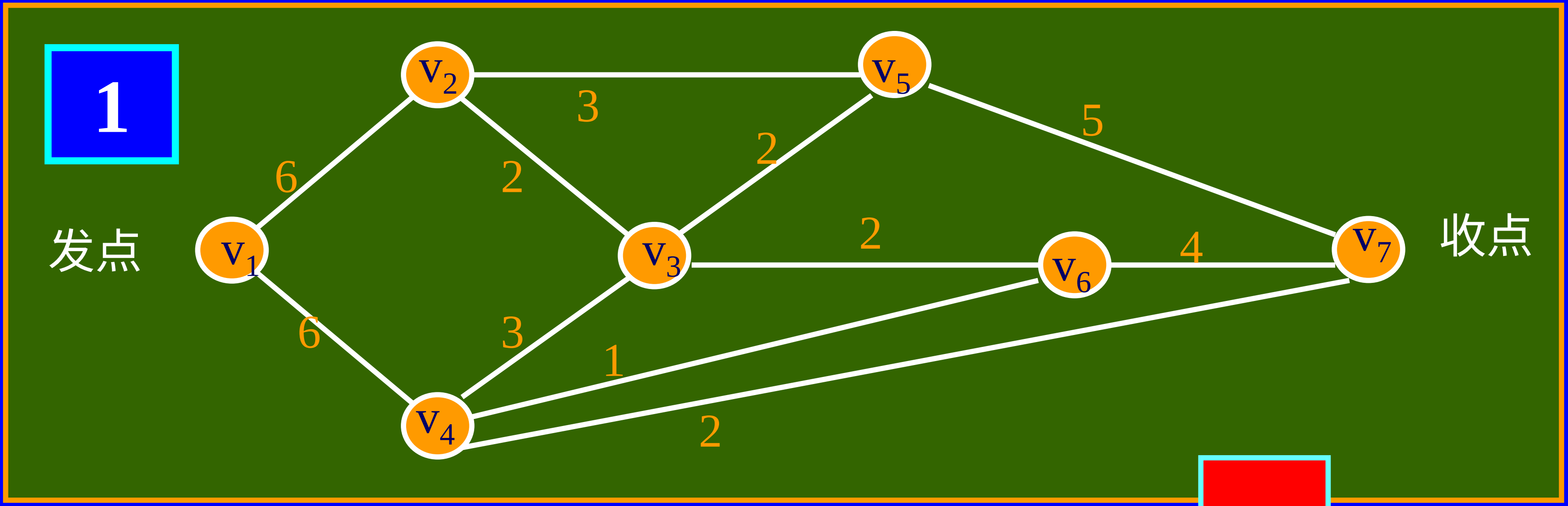
2 找出一条从发点到收点的路，在这条路的每一条弧顺流方向的容量都大于0。如果不存在这样的路，已求得最大流。

3 找出这条路上各弧的最小顺流容量 p_f。

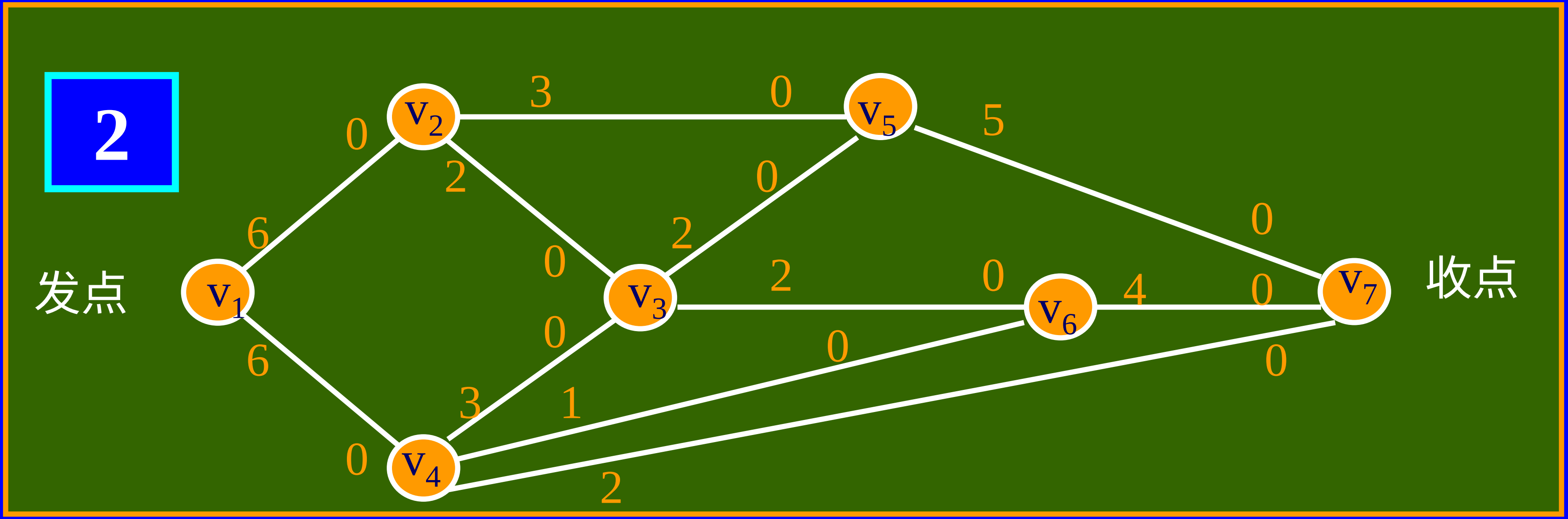
4 在这条路的每一条弧逆流方向增加容量p_f，在这条路的每一条弧顺流方向减少容量p_f。返回步2

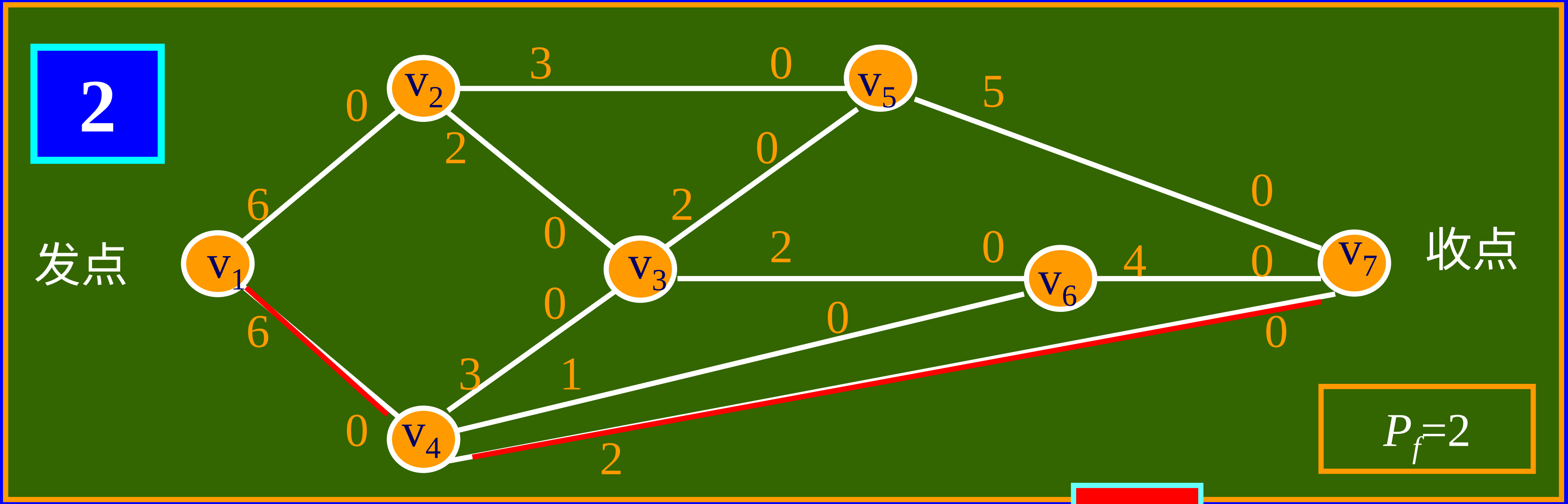
注意：每次尽量选择弧的数量少的路。

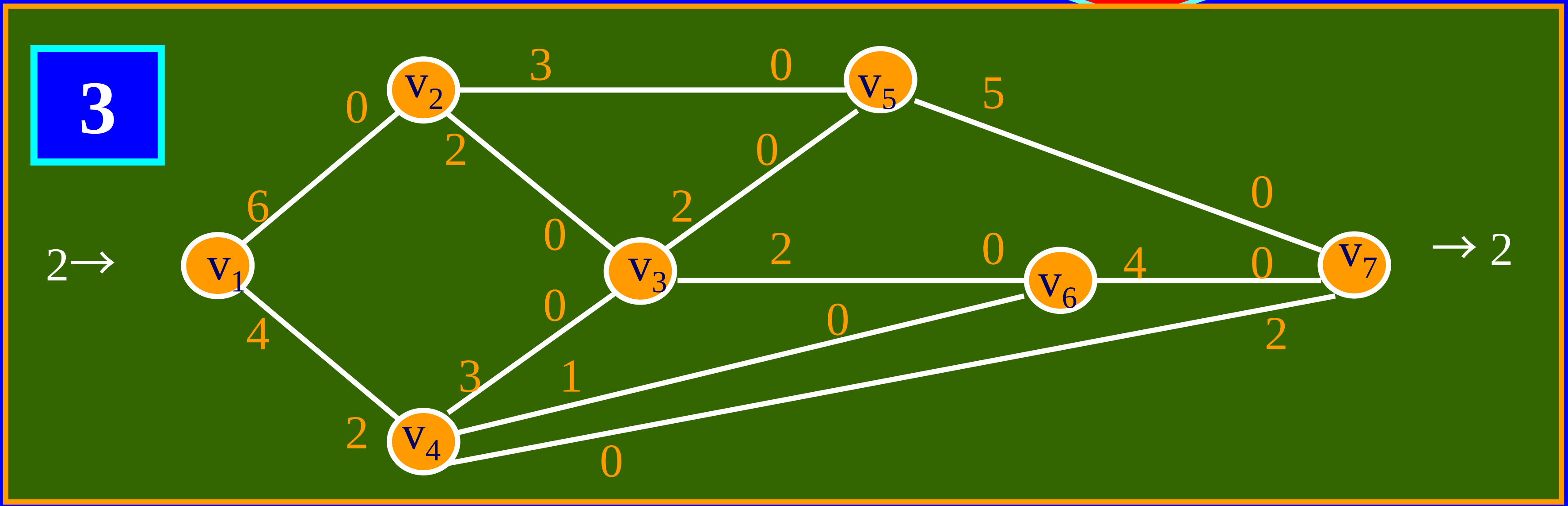
1


发点
收点
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
6
6
3
2
2
3
1
2
5
2
4
2

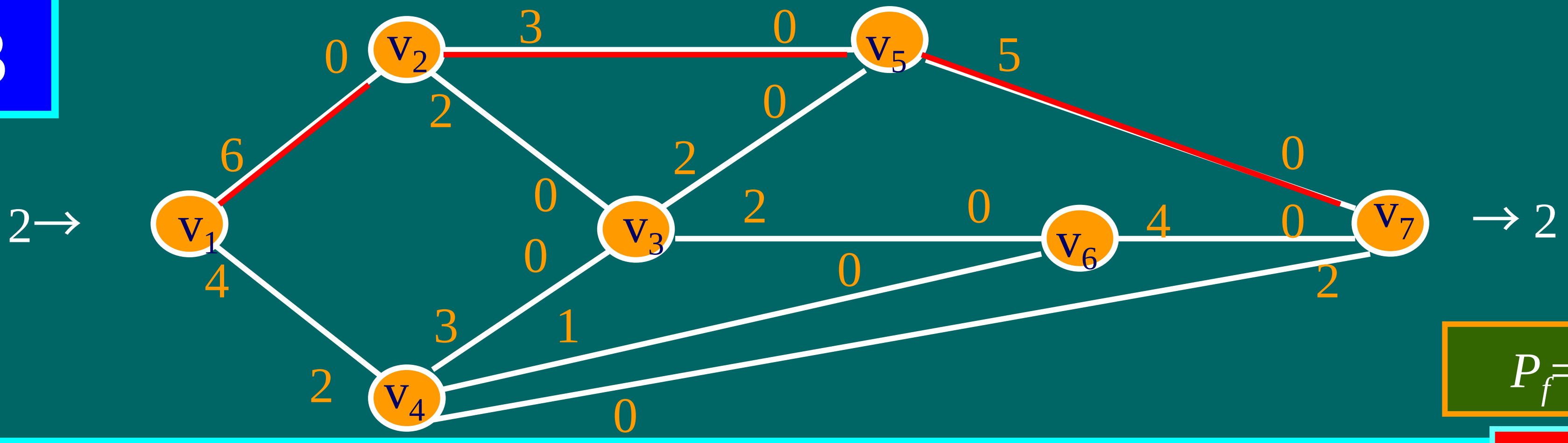
2


发点
收点
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
0
6
6
0
3
0
2
0
0
2
0
3
1
0
2
0
5
0
4
0
0
2


2
发点
收点
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
6
0
6
0
3
0
2
0
0
2
2
0
5
0
0
3
1
2
0
0
4
0
0
$P_f=2$

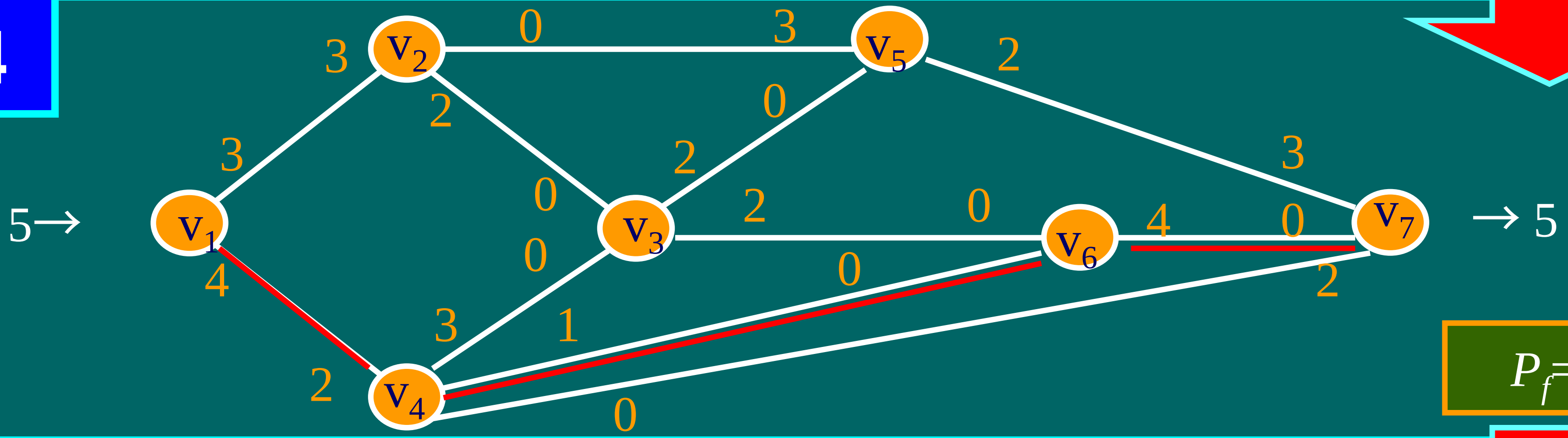

3
2→
→ 2
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
6
0
4
2
3
0
2
0
0
2
2
0
5
0
0
3
1
0
0
0
4
0
2

3


2→
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
→ 2
0
3
0
5
2
0
6
0
2
2
0
0
4
0
0
0
4
0
2
3
1
2
0

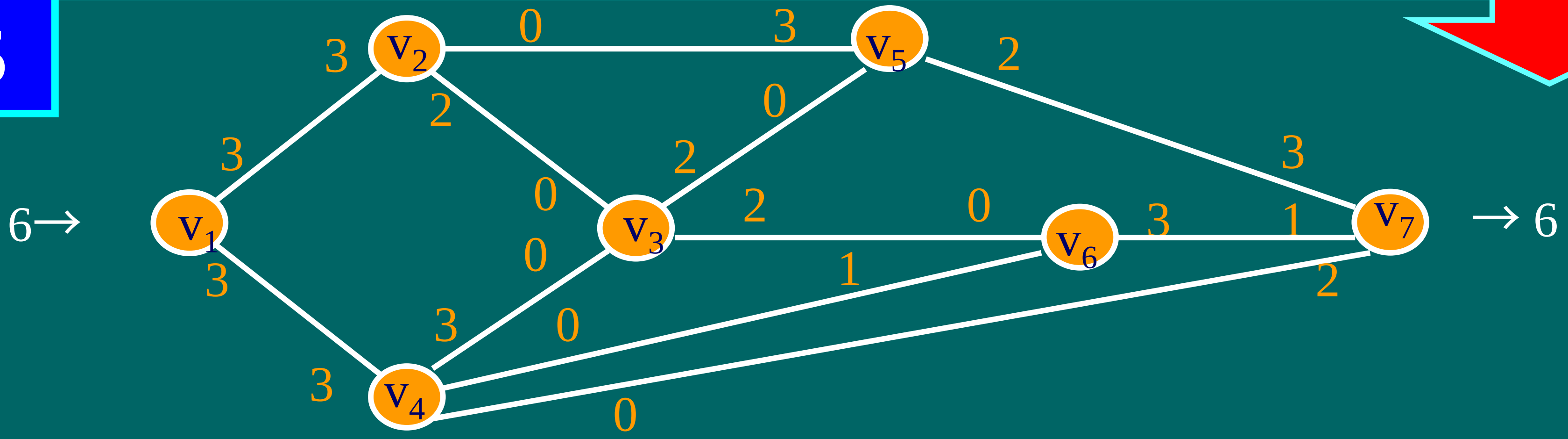
P_f=3

4

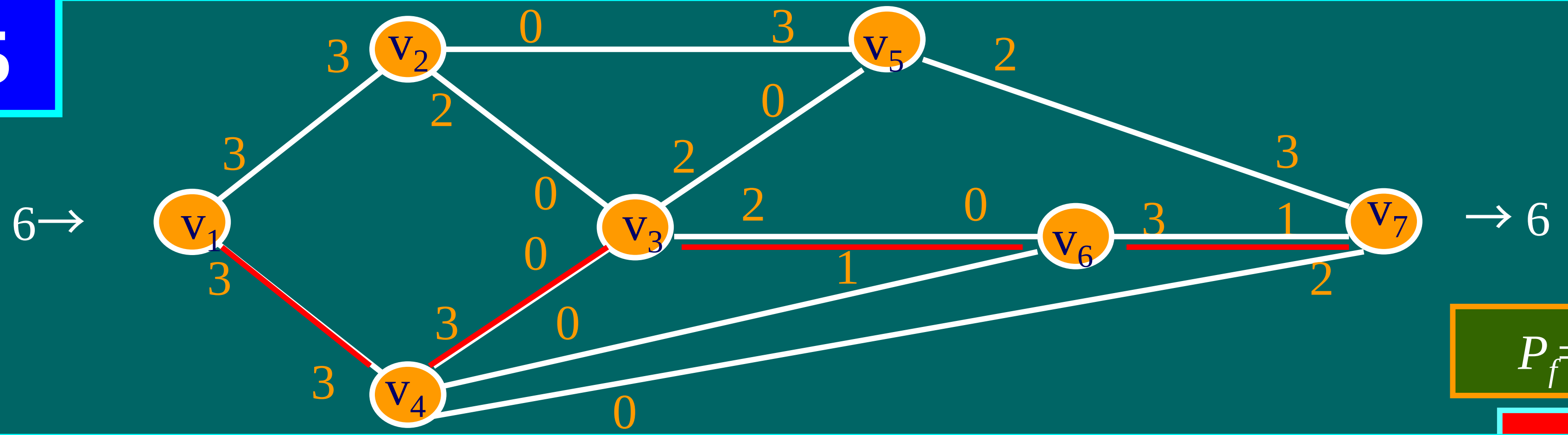

5→
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
→ 5
3
0
3
2
2
0
3
2
3
0
2
0
4
0
4
0
0
2
3
1
2
0

P_f=1

5

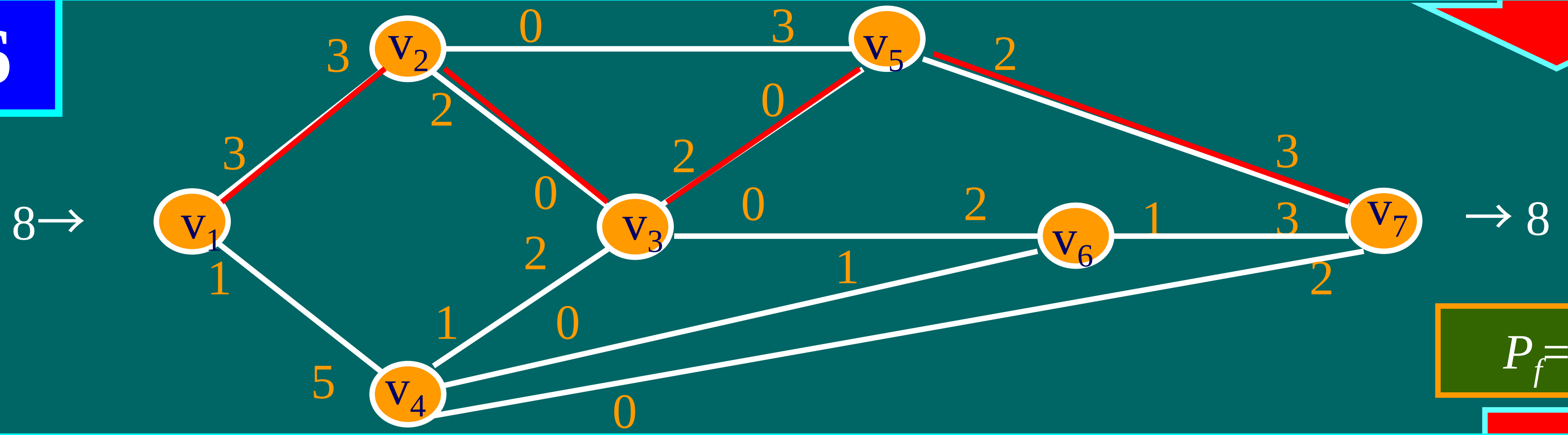

6→
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
→ 6
3
0
3
2
2
0
3
2
3
0
2
0
3
1
3
0
1
2
3
0
3
0

5



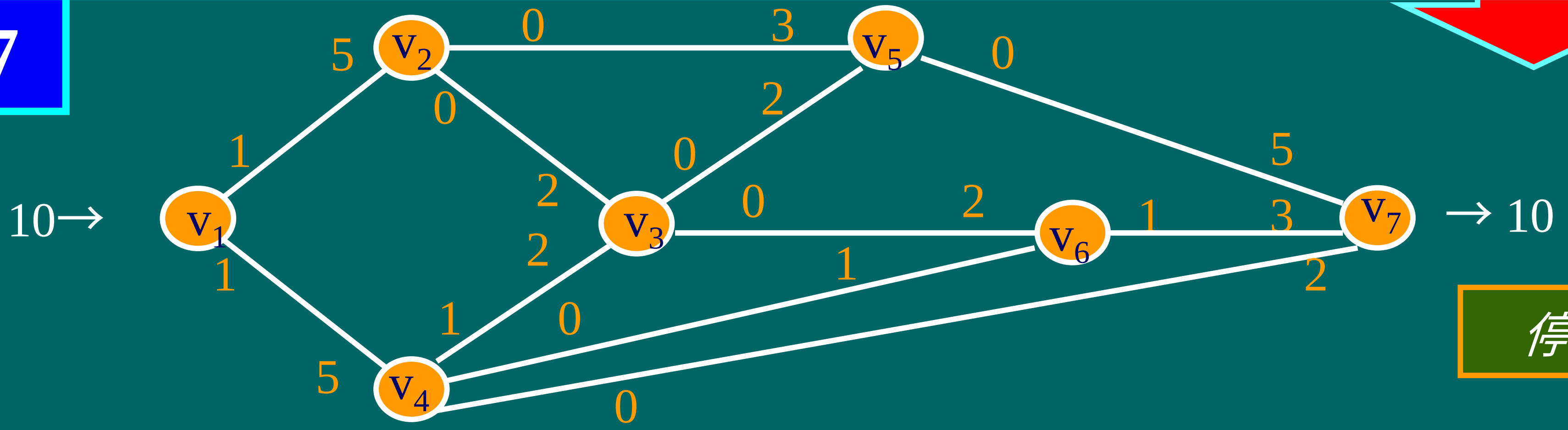
P_f=1

6



P_f=1

7



停止